This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

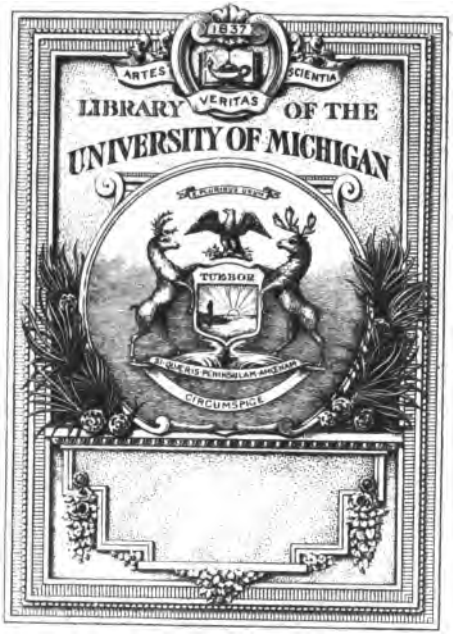
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



Digitized by Google

Q
175
.P293

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNIBALE PASTORE

SOPRA LA TEORIA DELLA SCIENZA

LOGICA, MATEMATICA E FISICA

TORINO
FRATELLI BOCCA, EDITORI
MILANO - ROMA - FIRENZE
1903

Digitized by Google

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Vincenzo Bona, Tip. delle LL. MM. e dei RR. Principi (48523)

Digitized by Google

A mio suocero VENCESLAO MUCCHI, *saggio ed integerrimo magistrato, che mi conforta con la parola e con l'esempio all'austera ricerca della verità.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Hist. sci.
Liberma
2-21-24
9719

PREFAZIONE

3-4-'24-e.13.

Questo lavoro *sopra la teoria della scienza*, in ordine alla Logica, alla Matematica ed alla Fisica, nacque da un'ipotesi erronea sopra la teoria della conoscenza logica e matematica che fu in seguito abbandonata per le ragioni che faremo note fra poco. Esso ha dunque una storia che forse altri si studierebbe di celare ai lettori, perchè generalmente le ipotesi false si abbandonano di malumore.

Ma noi la racconteremo brevemente, perchè, come non vi è errore della cui conoscenza l'amico della verità non possa fare buon uso, così è vero che quella prima ipotesi falsa ci ha reso più servizio di un'ipotesi vera.

Poichè, considerando l'umano pensiero, noi eravamo giunti a riconoscere che non potremmo formare nè giudizî nè raziocinî senza un principio di unità sintetica capace di collegare e di

Digitized by Google

unificare i varî elementi delle percezioni e delle idee, ancora colla testa circonfusa da quell'alone di romanticismo filosofico che sembra un fatale prestigio della gioventù, noi avevano rivolto la nostra simpatia sul principio del limite nell'intento di rivelarlo come il principio unico per cui il soggetto e l'oggetto si offrono direttamente alla coscienza col rapporto che, nello stesso tempo, li unisce e li separa. Quindi, progredendo nella via della conoscenza, ed esaminando ogni atto di quel pensare che non pare altro che un limitare, eravam giunti a concludere che la nostra intelligenza non può nulla conoscere fuori dello schema del limite, vale a dire dell'essere, giacchè il nulla stesso ci si afferma come un limite negativo, in altri termini, il concetto di limite si afferma anche quando si nega.

Tutto è dal limite; tutto è nel limite; tutto è limite; ecco la grande parola che ne pareva necessario dichiarare, riscontrando la formola della sua duplice radice affermante con l'intero albero genealogico delle conoscenze. Per essere sinceri noi dobbiamo ancora ammettere che ad un certo punto, trascinati da quella gagliarda tendenza che ha lo spirito umano ad attribuire una separata esistenza alle proprie astrazioni, ad *entificare,* come direbbe il Rosmini, noi concludemmo: nel limite è la sola scaturigine tanto del reale quanto del possibile e tutte le scienze sono rivi sgorganti dalla sua pienezza.

Maravigliosi rapimenti dell'ipotesi!

Digitized by Google

La ragione umana associa questo principio a tutte le questioni di Logica, di Matematica, di Fisica, di Meccanica, di Chimica, di Psicologia, di Sociologia. Esso lo ritrova in guise diverse, nelle innumerevoli trasformazioni di cui la natura è teatro, e, quando lo sposa al principio dell'evoluzione e alle idee dello spazio e del tempo, in questo universo — che ci apparirebbe come immobile ed informe se il limite fosse assente — l'entrata di esso dà il segnale di vita a tutti i fenomeni.

Se non che, ad opera compiuta e dopo d'aver concluso con questa sentenza: la nozione di limite è fondamentale così alla vita del pensiero come alla vita dell'azione, perchè, novantanove volte su cento, la possibilità di trovare la soluzione dei nostri problemi dipende unicamente dalla possibilità di ridurre ogni dissidio ad una pura questione di limiti; considerando le cose al lume della più fredda ragione, noi ci avvedemmo che se in base a tutte le nostre pseudocritiche elucubrazioni, avessimo voluto discendere sul terreno dell'esperienza, e servirci una buona volta della nostra teoria del limite come d'un metodo infallibile di ricerca, noi non avremmo mai potuto giungere alla soluzione concreta d'un problema ideale o materiale, qualunque, senza una larga e spregiudicata ed imparziale osservazione dei fatti.

Le conclusioni erano dunque ben differenti da quelle a cui credevamo di poter arrivare. Quindi

Digitized by Google

quell'entusiasmo col quale dapprima vedevamo nel principio di limite la vera e sola attività logica creatrice delle formalità dello spirito umano, subì una scossa profonda e, nostro malgrado, trascinati dall'evidenza dei fatti, dovemmo assegnare alla costruzione sistematica del limite un còmpito ben più limitato e modesto.

Così fummo costretti a riconoscere il fondamento d'una verità logica della massima importanza e cioè che ciò che è vero per la teoria della conoscenza non è sempre vero per la pratica dei fatti o almeno non ha molte volte nessunissimo valore.

Per queste ed altre ragioni, che ora non è il caso di riferire, abbandonato ogni prestatuto dogmatico introdotto dianzi furtivamente nel pensiero, quasi per gettarvi — dentro ferreo stampo — tutti i fatti del conoscere umano, ricominciammo da capo le nostre ricerche filosofiche colla scorta d'un più rigoroso procedimento.

Ed anzi tutto giudicammo indispensabile dare un'occhiata generale alle condizioni presenti della Filosofia teoretica, per non fare — come direbbero gli Inglesi — un altro *salto nel bujo.*

Ora quale è l'orientazione della Filosofia teoretica contemporanea?

Se giriamo lo sguardo intorno a noi non è malagevole ravvisare che, in virtù di antiche e di nuove ragioni, che sfioreremo rapidissimamente fra poco, il problema generale della Filosofia teo-

Digitized by Google

retica va sdoppiandosi in due altri problemi speciali, fra cui s'apre sempre maggiore dissidio:

1° il problema della conoscenza;

2° il problema della scienza.

Ed è chiaro che il primo ha carattere individuale, collettivo il secondo.

" Ora, come osserva acutamente il Tarozzi, il periodo storico che attraversiamo è caratterizzato, anche nel campo puramente intellettuale, da un assai maggiore interesse prestato ai fenomeni umani che si presentano come un organamento complessivo, nei quali cioè l'opera individuale tende ad occultarsi nella dinamica dell'insieme ".

" Tutta adunque quella folla di questioni in cui s'indugiava l'antica gnoseologia rimane assai più lontana da noi, come nube di battaglia nell'ala destra dell'esercito, alla quale si porterà l'ajuto, se la vittoria sull'ala sinistra non sarà definitiva per tutto il campo " (1).

Ma il solo porre la questione in tali termini, mentre implica evidentemente la necessità di prendere una netta e decisa posizione di combattimento o nell'ala destra o nell'ala sinistra dell'esercito teoretico combattente contro un comune nemico, non impone forse anche un'altra fiera necessità, alla quale finora niuno ha posto

(1) G. Tarozzi, *L'organamento logico della scienza e il problema del determinismo.* Prolusione. Firenze, Nicolai ed., 1899, pagg. 11, 12.

Digitized by Google

mente abbastanza, la necessità, voglio dire, di parteggiare o per la scienza, o per la conoscenza?

Nè si dica che non è il caso di preoccuparsi della necessità d'una tale scelta più di quanto non importi a due fratelli, per esempio, di dover combattere in questo o quel reggimento, astrazion fatta dalle maggiori o minori probabilità di venir esposti al pericolo, perchè prima di tutto converrebbe ammettere una vera relazione di fratellanza o per lo meno di concordia fra i due problemi speciali della conoscenza e della scienza, fra cui invece, è facile vederlo, un abisso sempre maggiore si spalanca.

E badate che ad aprire tale infausto dissidio potè bastare anche il semplice fatto di quella sempre maggior lontananza che andò stabilendosi tra le due ale dell'esercito combattente, lontananza che non tardò a tradursi poco a poco in completa separazione d'interessi così materiali come morali.

Fuor di metafora, bisognerebbe chiudere gli occhi alla realtà più viva e quotidiana per non vedere, tanto nel sereno porto della filosofia teoretica odierna, quanto parimenti nell'intima costituzione logica di tutto il sapere, riprodursi oggi quelle stesse due tendenze opposte che si delineano più o meno nitidamente e si contendono il predominio in altri e più vasti ordini della vita.

Quindi anche i minori problemi ricevono una specialità di assunti e di importanza che prima

Digitized by Google

loro erano ignoti, da quell'arduo conflitto che è forse il massimo impedimento alla composizione delle forze filosofiche contemporanee e del pari una delle più vaste sorgenti di ciò che forma la tristezza filosofica del nostro tempo. È ancora insomma il vecchio problema sociologico trasportato nel campo della filosofia: che cosa importa maggiormente, l'individuo o la società?

Guardiamo un istante le grandi ragioni della controversia.

L'insistente esame di coscienza inspirato dal profondo convincimento e dalla fede nelle facoltà dogmatiche o affermatrici del pensiero, ritenuto capace di fare anche dell'Universo il raziocinio d'un pensiero assoluto, arrestando troppo a lungo e troppo spesso lo sviluppo moltilaterale del senso della vita, doveva generare, non è possibile negarlo, uno scoramento improvviso negli studiosi. L'azione filosofica parve troppo tirannicamente imprigionata nell'orto concluso della riflessione individuale, onde del declinato indirizzo gnoseologico o della conoscenza pura si potrebbe dire col Poeta:

Sì che pensando consumò la impresa.

Dall'altro l'irrequieto anelito di novità, la concitata ansia di vivere, la crescente permeabilità della coscienza alle correnti sociali doveva spingere animosamente la gioventù a levar al cielo la scienza come simbolo di liberazione e di protesta contro il formidabile peso delle astrazioni

Digitized by Google

idealistiche, anche a detrimento d'ogni serena opera di riflessione individuale, sempre tuttavia necessaria per raccogliere i risultati dell'operosità umana, misurarne la potenza ed imprimervi una maggiore virtù di espansione.

Queste lotte tra i due indirizzi, gnoseologico e scientifico, furono nondimeno e sono e saranno ancora naturali e giovevoli, sempre quando nella febbre d'espansione, nella corsa anelante del pensiero onde sorgono tante irresistibili occasioni all'accendersi di gelose rivalità, non fossero trascese fino ad assumere delle forme troppo dolorose e detestabili di violenze. Imperocchè guai a quella filosofia che vive solo di memorie e non guarda animosamente anche all'avvenire; e per converso, guai a quella filosofia che si nutre solo del proposito di disgregare l'organamento logico costruito con tanta fatica dalla vita trascorsa, per la sola ragione che ogni età ha bisogni nuovi e incompatibili con tutto ciò che non è più presente in modo materiale e immediato.

Ora è singolare il vedere come a quella sintesi ideale verso cui si protendono oramai i più oculati sostenitori delle due opposte tendenze dell'individualismo e del collettivismo, con quel reciproco riconoscimento dei comuni diritti verso il quale s'orienta visibilmente tutta la coscienza più eletta dell'umanità e a cui rispondono sempre più le forme più concrete e sintetiche della vita politica e sociale, venga ognor più facendosi im-

Digitized by Google

perioso il bisogno di far corrispondere, con reciproco rispetto, anche le due forme teoretiche della conoscenza e della scienza, forse a lontano preludio d'un futuro incontro conciliativo di tutte le tendenze conservatrici e innovatrici della vita comune.

La gravità di questo problema non può dunque essere dissimulata da chi ascolti le voci del tempo (1).

È ora che si riconosca francamente una grande e consolatrice verità: non solo è vero che noi siamo un po' tutti individualisti e collettivisti in politica, egoisti e altruisti in morale, miscredenti e credenti in religione, idealisti ed empiristi in filosofia e via dicendo, ma è molto più vero altresì che noi abbiamo un vitale e supremo bisogno di esserlo.

È questo il massimo problema a cui dobbiamo andar incontro con tutta franchezza e in tutti i campi così della vita della realtà come della vita del pensiero.

" Gravati come Fausto da tanto cumulo di sapere, noi aneliamo come lui di salire all'aperto

(1) Su questo punto m'accordo perfettamente con quanto fu già notato, con geniale larghezza, da Alessandro Chiappelli, il quale raccogliendo nei suoi " problemi moderni " le sparse voci del tempo, ha saputo, nell'unità del disegno, integrare tutti i riferimenti più significativi della complessa vita moderna ed indicare l'orientazione generale delle tendenze, con l'istinto sagace del precursore.

Digitized by Google

e di gustare una buona volta la vita „ (1), anzi *tutta* la vita.

Ecco sorgere per tal guisa un problema urgentissimo in tutti i campi della vita, dalla politica alla morale, dall'arte alla scienza, dalla religione alla filosofia; il quale, variamente istoriandosi in tutte codeste relative necessità, venne di fronte al nostro pensiero e nell'àmbito ristretto delle ricerche scientifiche e filosofiche che ci occupano presentemente a formularsi nel modo che segue: sopra quali basi si può gettare un ponte di conciliazione tra il principio individualistico della conoscenza e il principio collettivistico della scienza?

Che il fine a cui una benintesa filosofia debba intendere ai giorni nostri, circa questo proposito, sia la conciliazione e quasi una simbiosi ideale delle due tendenze, tutti forse potranno consentire agevolmente. I dissensi ricomincieranno quando si tratterà di segnare ad ognuna la posizione e la funzione da compiere lungo la via dell'avvenire.

Ora le presenti ricerche sono appunto rivolte a dimostrare anzitutto la necessità dell'accettazione simultanea, teoretica e pratica delle due tendenze opposte riferite, quindi a tracciare alcuni limiti positivi tra i due problemi corrispondenti, che sono in pari tempo le due esigenze

(1) Alessandro Chiappelli, *Voci del nostro tempo*. Saggi sociali. Remo Sandron Ed., Palermo, 1903, pag. 299.

Digitized by Google

essenzialmente critiche del pensiero filosofico moderno.

Ed affinchè il lettore possa abbracciare con un colpo d'occhio il piano e la portata di questo saggio — in cui si raduna il frutto di lunghe e faticose ricerche — ne esporrò molto succintamente le linee generali.

In merito alla teoria generale della scienza esso esercita sostanzialmente due ufficî che io ritengo inseparabili, benchè di natura assai diversa.

Adempiono al primo ufficio, che è essenzialmente critico ed analitico, i tre primi capitoli della parte prima (*Le idee primitive*), nei quali ho cercato di compiere col massimo rigore possibile l'analisi e la riduzione alle pure idee primitive di tutte le idee che s'incontrano nei tre grandi ordini di scienze seguenti:

1° Logica (Grammatica, Logica naturale, Logica pura);

2° Matematica (Aritmetica e Geometria);

3° Fisica (Fisica matematica e Meccanica razionale).

È noto che le varie scienze assumono, fin dagli inizî, alcuni concetti fondamentali non definiti, ne impiegano più o meno consciamente le proprietà, vi fondano sopra i loro postulati e le loro teorie, insomma si servono di questi enti larghissimamente per il loro svolgimento, senza però farli oggetto d'uno studio appropriato e di-

Digitized by Google

retto, salvo rari casi che saranno debitamente contemplati a suo tempo.

Così s'introducono negli organismi delle varie scienze varî gruppi di enti non definiti, che vale sempre la pena di annoverare e di conoscere perfettamente.

Io esaminai precisamente questi concetti primitivi ammessi, più o meno consciamente, nei varî ordini di scienze riferite; quando l'analisi era già stata spinta agli estremi riportai imparzialmente non solo l'elenco degli enti primitivi trovati, ma pure il procedimento scientifico impiegato nei varî casi a tale scopo; quando la cosa mi parve ancora possibile cercai di ridurli analogamente ai minimi termini; in tutti i casi insomma procurando di determinarne bene il vero senso ed il vero valore e intendendo così di determinare anche il valore e la natura delle cognizioni scientifiche da essi derivanti.

Questo ufficio non fu però compiuto alla maniera della *Gnoseologia* di un tempo, dottrina pure tanto benemerita in ordine alla cognizione generale delle nostre cognizioni.

Criterî nuovi ed essenzialmente logici presiedettero alle nuove ricerche, le quali — astrazione fatta dalle mie fatiche — dovrebbero essere riguardate da tutti gli studiosi come introduzione indispensabile all'esercizio ed al compimento del sapere; giacchè solo da questo punto di vista le varie scienze non possono celare ai nostri sguardi la loro maggiore o minore *vulne-*

Digitized by Google

rabilità, e ben si può dire, senza paradosso, a parer mio, che le idee primitive sono il tallone di Achille delle scienze.

In ordine al secondo ufficio sono necessarî alcuni schiarimenti.

Per acquistare una più vasta e profonda cognizione dell'organamento logico delle scienze si richiedono, come è noto, non solo i risultati delle singole inchieste analitiche operate negli stretti àmbiti delle scienze, ma i nessi che congiungano insieme i diversi principî fondamentali e le molteplici operazioni che si compiono nelle fasi successive del procedimento logico delle scienze (idea — giudizio — raziocinio).

Inoltre, poichè la vera scienza consiste non nel possedere un numero più o meno grande di cognizioni, ma sopratutto nel conoscere i veri fatti fondamentali e ciò che v'ha in essi di reale e di costante e, analogamente, siccome l'ideale supremo del sapere non è già quello di conoscere un complesso di scienze fra loro slegate e indipendenti, ma di possedere una veduta sintetica e coerente sopra la natura universale del sapere, così io mi proposi di raccogliere i singoli risultati del lavoro analitico compiuto in varî ordini di sintesi corrispondenti per preparare nulla più che alcuni materiali che potessero servire, a guisa di cèntine e palchi provvisorî, alla costruzione dell'immenso e interminabile edifizio della scienza.

Non mi restava pertanto che da paragonare

Digitized by Google

fra loro i varî gruppi di enti non definiti e irreduttibili trovati colle analisi precedenti per vedere se potessero o dovessero accomunarsi o non accomunarsi fra loro, secondo la loro vera natura.

Il capitolo quarto (*Sintesi delle idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica. Parte I*) adempie a codesto delicatissimo ufficio, il quale — sempre facendo astrazione dai risultati quali che siano delle mie ricerche — dovrebbe essere considerato come la più feconda e solenne iniziativa della critica filosofica odierna, quando volesse compiersi a dovere e sistematicamente per tutti gli ordini delle scienze.

Due conclusioni generali raccolgono i risultati di questo lavoro (La piena e mutua convertibilità di tutte le idee primitive logiche, matematiche e fisiche, fondata sul fatto della loro perfetta equivalenza; — la possibilità d'una spiegazione unica e comune).

Da queste conclusioni furono ricavate alcune conseguenze teoriche e pratiche (*Cap. V. Applicazioni generali*) sulle quali desidero di consultare la opinione dei pensatori.

In primo luogo (Cap. III, § 1: *Scienze derivate o miste*) riconoscendo che tutta la famiglia degli enti primitivi logici, matematici e fisici ha uno stipite solo, e quindi che i varî ordini scientifici corrispondenti non sono altro che la realtà mascherata e un solo processo che si rivela come la necessità primitiva e determinante della scienza,

Digitized by Google

o almeno che è sempre lecito a noi di studiare i fenomeni scientifici *come se* le cose fossero ordinate appunto così, ne risulta che le varie formalità scientifiche della Logica della Matematica e della Fisica possono scambiarsi reciprocamente e con perfetto rigore. In base a questo principio il lettore comprenderà chiaramente che come il semplice spettro colorato che si ottiene colla rifrazione prismatica della luce bianca ci rivela, nelle sue striscie variopinte, tre colori fondamentali e quattro intermedii o misti, così il fascio unico delle idee primitive si scompone in un ventaglio di scienze di cui tre possono venir considerate come fondamentali (Logica, Matematica e Fisica) e le altre come scienze derivate o miste o intermedie. Alcune di queste ultime hanno già una storia ed un'importanza straordinaria, come la Logica matematica, la Fisica matematica e la Meccanica razionale; altre invece, come la Logica sperimentale, restano ancora intentate di sana pianta, pure avendo teoricamente lo stesso valore e la stessa ragione scientifica delle prime.

In secondo luogo (Cap. III, § 2: *Analisi ed apprezzamento della Logica matematica*) sarà importantissimo il rilevare che delle otto notazioni considerate come primitive e come tali usate dalla Logica matematica presentemente per definire simbolicamente tutte le idee della Logica e per esprimerne tutte le proposizioni, tre sole possono ritenersi propriamente come primitive

Digitized by Google

e fondamentali; le altre cinque possono dedursi logicamente da queste.

Di più siccome queste tre idee fondamentali della Logica matematica non differiscono essenzialmente da quelle altre che furono riscontrate nei tre campi generali della Logica, della Matematica e della Fisica, anzi sono perfettamente convertibili ed equivalenti fra loro, così ne viene che per esprimere tutte le idee e le proposizioni di una determinata teoria matematica (Aritmetica, Geometria) non è affatto necessario aggiungere ai segni proprî di questa scienza i segni speciali appartenenti alla Logica.

Così si capirà — per nuove ragioni — che un'esposizione rigorosa dell'Aritmetica e della Geometria non solo *può* farsi in modo del tutto indipendente così dalla Logica in generale come dalla Logica matematica in particolare, ma *deve* farsi assolutamente in sè stessa, senza bisogno di ricorrere — come avviene ora — ai segni speciali della Logica.

Se le dimostrazioni che abbiamo tentato di dare a questo riguardo non sono fallaci — e non saranno certo scevre di inesattezze trattandosi di una questione complicatissima per cui invochiamo tutta l'indulgenza dei competenti — l'interpretazione stessa della Logica matematica resterebbe notevolmente modificata.

Ma come ho già detto, su questo campo desidero sopratutto di consultare l'opinione dei pensatori.

Digitized by Google

A questo primo tentativo di coordinazione seguono due altri gruppi di ricerche rivolte a raggiungere un concetto sempre più elevato e comprensivo della scienza (*Parte II. Gli assiomi. — Parte III. Le teorie*).

È questo in generale un lavoro molto meno indipendente e anche più ingrato del primo, poichè, mentre richiede la massima cura, è sempre manchevole e troppo lontano dal proprio ideale.

Tuttavia, a questo riguardo, mi permetto d'insistere sopra d'un fatto degno della maggiore considerazione.

Lungi dal pretendere che per tal via si possa giungere ad una teoria assoluta della scienza, nel senso di poterla *costruire* colla sola esplicazione dialettica di un concetto aprioristicamente prestatuto e considerato come principio irrefragabile e supremo come pretese un tempo la Metafisica dogmatica, illuminato anzi dai risultati così poco lusinghieri del mio viaggio avventuroso in traccia dell'assoluto, io mi propongo invece di dimostrare precisamente il contrario, in base ai risultati dell'ammirabile teoria dei modelli (1) che costituisce uno dei meriti più singolari di Enrico Rodolfo Hertz nel campo della

(1) Cfr. il mio " *Saggio sopra l'esperienza mediata* „ negli " Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XXXVI, anno 1900-901, pag. 12.

Intorno alla teoria dei modelli, svolta per la prima

Digitized by Google

Fisica matematica e della Meccanica razionale, e che io tento d'introdurre per la prima volta nel campo della Filosofia teoretica (*Parte III. Le teorie. Capo I. Dell'esperienza e delle teorie logiche, matematiche e fisiche in ordine alla teoria generale dei modelli*).

Vale a dire che si tenterà di introdurre, fra l'altro, anche l'ipotesi seguente: se un sistema di fatti qualunque (logico, matematico e fisico) ammette una soluzione teorica soddisfacente, ne ammette infinite altre che possono rendere conto ugualmente bene di tutte le particolarità osservate nei fatti medesimi.

A parer mio, la bella *teoria dei modelli* è destinata a recare vantaggi teorici e pratici non comuni; ed io mi studierò di mostrare imparzialmente ai miei lettori tanto l'utilità quanto i pericoli di questo nuovo genere di ricerche a cui è rivolta la trattazione presente.

Analogamente a quanto è già stabilito nel campo delle scienze fisiche, insisteremo sul fatto che le equazioni, a cui una o infinite teorie logiche, matematiche o fisiche differenti, ma equivalenti, possono condurre, hanno un significato ben più largo e più profondo che le ipotesi da cui si sono ricavate.

---

volta rigorosamente dall'Hertz nella campo della Meccanica razionale, cfr. H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt.* Leipzig, I, A. Bartz, 1894.

Digitized by Google

Sopratutto sarà prezzo dell'opera il far riconoscere che ciò che rimane costante ed invariabile nei varî sistemi che possono essere in contraddizione fra loro per le differenti immagini delle quali hanno rivestito la realtà e che noi siamo tentati di prendere per una forma quasi vuota di materia, per una ombra fuggitiva ed inafferrabile della realtà, non è già un'ombra e come l'immagine di Virgilio *volucrique simillima somno*, ma è veramente la quintessenza fondamentale d'ogni nostra possibile conoscenza.

Per ultimo vedremo sempre più chiaramente che quanto più ci avviciniamo all'unità, cioè a quel concetto più comprensivo e più elevato della realtà che ci consentono le condizioni temporanee del sapere, tanto più noi andiamo perdendo la semplicità, l'indipendenza e l'assolutezza della spiegazione filosofica.

La massima applicabilità delle equazioni fondamentali supreme che sono ciò che v'ha di più elevato nella scienza, si traduce quindi e sempre più nettamente nell'espressione della massima quantità possibile di rapporti determinati e costanti; il che val quanto dire che il cammino della Scienza e della Filosofia non è più verso l'Assoluto ma verso una formula, o supremo *modello dei modelli*, di cui non vuolsi certo proporre un'espressione adeguabile qualunque, in nessun punto di queste preliminari proposte.

Basti dire, per ora, che un'equazione o un sistema di equazioni in ragione della sua crescente

Digitized by Google

applicabilità a più vasti ordini di fatti, acquista innegabilmente un crescente valore di relatività, nel senso che diventa riferibile ad un sempre maggior numero di casi.

La massima generalizzazione delle generalizzazioni a cui tende la scienza non è quindi altro che la massima relazione possibile delle relazioni, in altri termini l'ideale della scienza non è già l'assoluto, ma in certo qual modo il *relativissimo*.

Il servizio che ci rende ogni generalizzazione cioè la conquista d'un rapporto più alto si è di fornirci un osservatorio più elevato dal quale noi possiamo dominare più sicuramente l'intero orizzonte delle nostre cognizioni.

Ma ogni legge non è che un intermediario; ogni estremo non è che un principio.

La vita della scienza è un circolo nel quale essa gira, un circolo tale, che, partendo dall'impercettibile raggio delle idee primitive, d'ogni lato si stende in circoli nuovi e più vasti ed indefinitamente.

Verso il termine del saggio il lettore troverà sviluppate con una certa ampiezza alcune questioni (*Del fondamento artistico della scienza - Dell'identificazione matematica del differente*), le quali, se è vero che hanno un'importanza molto secondaria di fronte alla teoria generale della scienza, nondimeno meritano una certa riflessione, perchè non possiamo, nè dobbiamo risolverci ad accettare ciecamente un'opinione qualunque a questo

Digitized by Google

riguardo, nè i tempi sono certamente propizî a ciò.

Conviene però avvertire che l'esame della prima questione veniva direttamente imposto dalla trattazione scientifica precedente e in particolar modo dalla *Teoria dei modelli* la quale avendo valore rappresentativo evidentissimo si dimostrava atta a portare un *argomento nuovo* in favore della dottrina del simbolismo scientifico che appare quindi sempre meglio una delle più solide conquiste della teoria della scienza.

Quanto alla seconda questione, se gli esempi citati nel capitolo terzo (Parte III) potranno parere insufficienti, per far vedere in qual senso e per quale ragione l'impiego volontario d'una convenzione irrazionale sia stato e possa ritenersi in linea generale vantaggiosissimo alla ricerca scientifica, rimando il lettore alle acutissime *osservazioni sulle questioni di parole* del Vailati (1), e sopratutto alle *15 lezioni sperimentali su la luce* del Garbasso (2), dove, presso che ad ogni pagina, il processo dell'identificazione ipotetica del differente è dichiarato e adoperato come ottimo

(1) G. Vailati, *Alcune osservazioni sulle questioni di parole nella Storia della scienza e della cultura.* Prolusione al corso libero di Storia della Meccanica. Torino, F. Bocca Ed., 1899.

(2) A. Garbasso, *15 lezioni sperimentali su la luce considerata come fenomeno elettromagnetico.* Milano, Ed. Rivista " L'Elettricità ", 1897.

Digitized by Google

strumento metodico e incentivo a sostanziali progressi scientifici.

Terrà dietro a questa trattazione sopra la teoria della scienza un primo saggio di Logica sperimentale (*Sopra un modello fisico di alcuni fenomeni logici*), come applicazione rigorosa di alcune teorie sostenute in questo volume, alla giustificazione del quale titolo i lettori cominceranno a trovare alcune indicazioni sommarie nei capitoli IV e V della parte I di questo volume.

Intorno all'indole del quale è forse ancora bene osservare che tutte le nostre ricerche logiche sui principî fondamentali, tutte le nostre conclusioni sulla natura e sull'organamento logico delle scienze, tutte le nostre proposte intorno alla teoria dei modelli, e in particolar modo le applicazioni sperimentali come prova e controprova delle riduzioni analitiche accennate, potranno solamente prestare ai lettori qualche suggestione di più, ma non mai la pretesa di erigere un sistema esclusivo di filosofia.

In verità l'unica preoccupazione mentale che è in pari tempo l'unico frutto accettabile di quelle preliminari ricerche fatte con un metodo anticritico alle quali abbiamo accennato fin dal principio di questa prefazione fu quello di tentare di vedere se e come ogni dibattito filosofico — caso per caso — sia riducibile ad una pura questione di limiti e di pratica filosofica, di limiti cioè da non potersi determinare senza una larga e spregiudicata ed imparziale osservazione dei fatti e

Digitized by Google

da doversi spostare ad ogni modo continuamente secondo le conquiste progressive dell'esperienza; e di pratica filosofica da non potersi ottenere senza una franca dichiarazione intorno alla natura ed ai risultati — quali che siano — delle nostre ricerche.

In ultima analisi: avendo già avuto occasione di ricordare che vale sempre la pena di annoverare e di conoscere perfettamente tutti quei gruppi di enti non definiti che si introducono sempre, ma più o meno consciamente, nell'organismo delle varie scienze rivelandoci per tal modo il punto debole d'ogni teoria scientifica, quindi la necessità di ammettere in ogni scienza la presenza di un certo *quid* conoscitivo ed indefinibile e perciò *non*-scientifico, noi siamo in grado di comprendere oramai che la vera conciliazione delle due tendenze conoscitiva e scientifica non può nascere dal cercarne l'intimo accordo sopra un terreno qualunque non accordato dai fatti, ma dal riconoscerle essenzialmente indipendenti e irriducibili fra loro e tuttavia fra loro indissolubilmente radicate e congiunte, quasi a simboleggiare la bifronte imagine di quell'antichissimo iddio di nostra gente il quale portava in mano le chiavi di tutte le porte ed entrava in tutte le contingenze della vita pubblica e della vita privata, dio del principio e dell'ingresso riguardo al tempo, dio del trapasso e della continuazione riguardo allo spazio.

E poichè la natura delle scienze è tale che

Digitized by Google

esse postulano contemporaneamente da un lato delle *idee non spiegate* e dall'altro delle *idee spiegate*, piantisi dunque sul limitare delle scienze il simulacro di Giano foggiato con la duplice faccia, perchè l'una guardi il tesoro delle idee primitive, l'altra sia rivolta alla stupenda architettura delle idee derivate e niuno più di quel principio, che è simbolo dello spazio e del tempo, conservi le formidabili chiavi.

Le due opposte tendenze della Filosofia teoretica (il problema della conoscenza e il problema della scienza) si riconciliano in un modo solo pertanto, cioè ammettendole entrambe nelle loro irreduttibili direzioni antitetiche, ma pur radicandole fra loro in una sintesi ideale a guisa di quella duplice e maravigliosa polarità che raddoppia la vita delle piante in due forme d'attività differenti: l'avidità della terra e l'avidità della luce.

Arduo argomento codesto alla cui chiara e convincente nozione non sarà mai soverchia l'attenta meditazione dei pensatori.

Da questo punto di vista, le presenti ricerche e ogni altro genere di studî intrapresi al medesimo intento, si potrebbero quindi considerare adoperando la strana ma bizzarra espressione che trovò il Dilke a proposito della legislazione sociale dell'Inghilterra, come una specie di sieroterapia applicata all' organismo della filosofia teoretica; vi si iniettano in certo qual modo quei germi preservativi e immunizzanti contro i quali

Digitized by Google

gli assalti virulenti di tutte le scuole esclusive dall'apriorismo dogmatico all'empirismo, dal determinismo scientifico all'indeterminismo, possono restare neutralizzati o almeno attenuati in buonissima parte.

Per ultimo riflettendo che non v'ebbe mai tempo nel quale le cure apprestate dalla filosofia alla retta cognizione della verità fossero così necessarie ed urgenti come oggigiorno, vogliamo sperare che le presenti ricerche — per quanto difettose ed imperfette — potranno forse incontrare una qualche benigna accoglienza da parte dei competenti come quelle che non saranno tornate affatto inutili alla cultura degli studî filosofici.

Sento il dovere di dichiarare che, durante la preparazione di questo lavoro, mi soccorse la benevolenza di scienziati e d'amici molti, fra i quali m'è caro di ricordare i nomi del Prof. Giuseppe Peano da cui ricevetti libri e consigli preziosissimi per l'interpretazione della Logica matematica, e del Prof. Antonio Garbasso che, con affettuosa sollecitudine, mi aprì il campo della Fisica matematica e della Meccanica razionale e mi fu largo di schiarimenti e di aiuti d'ogni maniera.

Sono lieto che mi si porga occasione di esprimere a tutti pubblicamente la mia più profonda riconoscenza.

Torino, 5 giugno 1903.

A. P.

Digitized by Google

Digitized by Google

PARTE PRIMA

LE IDEE PRIMITIVE

Digitized by Google

Digitized by Google

Criterio direttivo dell'Analisi.

1. Mi propongo in questa prima parte di fare una analisi più che sarà possibile completa di tutti i termini (enti, idee, concetti, nozioni) che si adoperano:

nella Logica (Grammatica, Logica generale),

nella Matematica (Aritmetica, Geometria),

nella Fisica (Fisica matematica, Meccanica razionale) (1), per tentare di giungere ad una riduzione si-

---

(1) Saranno così trattati in questo saggio i due primi gruppi di scienze (meno la Chimica) seguendo il criterio della « Classificazione delle Scienze » dello Spencer, che è adottabile per ciò che riguarda la scienza in senso stretto. Ma è bene avvertire che la classificazione spenceriana delle scienze in senso stretto viene inglobata in una nuova Classificazione delle scienze in senso largo dal Trivero, il quale considera la scienza come un genere di cui sono specie tre ordini diversi di scienze: 1° Storia e Geografia; 2° Scienza in senso stretto; 3° Filosofia. È questo veramente il quadro del sapere o dello scibile che comprende le tre grandi partizioni: Storia, Scienza, Filosofia. La Scienza in senso stretto,

Digitized by Google

stematica e rigorosa di tutte le nozioni in due categorie distinte:

1° Nozioni primitive,

2° Nozioni derivate, o composte, riducibili alle primitive mediante lo strumento della definizione.

2. Per non fare un lavoro vano in questo genere di ricerche è necessario precisare immediatamente che cosa s'intenda per definizione.

Per definizione intendiamo una proposizione della forma $x = a$, ove x è il termine nuovo che si vuol definire, a è un aggregato di termini avente un significato già noto. Così è chiaro che per definire un termine qualunque bisogna averne già noti — per ipotesi — alcuni altri; e dire che — posti certi termini già noti — si può definire un nuovo termine x, significa attribuire ad x il medesimo significato di un complesso di termini già noti. Da ciò risulta che quando noi crediamo d'introdurre nelle nostre definizioni dei termini di valore pienamente determinato e ben definito, noi non facciamo altro che servirci d'un numero limitato di termini preliminari non mai definiti, anzi d'impossibile definizione, per comporre e definire tutti gli altri.

E se è vero che noi riusciamo ad intenderci egualmente bene anche sopra il valore di questi termini non definiti, ciò deriva dal fatto che noi li adoperiamo

---

conforme alla distinzione dello Spencer, viene poi divisa in tre gruppi: 1° Scienze Astratte o Analitiche (Razionali o Esatte); 2° Astratte — Concrete o Analitiche — Sintetiche (Positive o Sperimentali); 3° Concrete o Sintetiche (Naturali o d'Osservazione). Cfr. SPENCER, *Classification des sciences*. Paris, Baillière, 1872. — TRIVERO, *Classificazione delle scienze*. Milano, Hoepli, 1899.

Digitized by Google

sempre con quel significato che essi hanno assunto nel linguaggio ordinario; ma è innegabile che tutto il sistema definito delle nostre cognizioni riposa, in ultima analisi, sopra un piccolo numero di termini indefinibili, vale a dire sopra una semplice serie di convenzioni.

Appunto con questi criteri noi cercheremo di esaminare quali sono gli enti logici, matematici e fisici, che si possono definire per mezzo di altri, e quali sono quelli che si devono assumere senza definizione. Si capisce che il primo lavoro di raccolta del materiale necessario alla generale riduzione analitica si potrebbe fare, prendendo un dizionario enciclopedico ben fatto e cancellando tutti i termini che si possono trovare composti, mediante un procedimento di esclusione analogo a quello che si applica in Aritmetica per trovare la serie dei numeri primi (Crivello di Eratostene). Ma questa cérnita troppo laboriosa e pesante può essere agevolata in più modi, come si vedrà appunto nelle ricerche seguenti.

3. Prenderemo anzitutto in esame le idee primitive della Logica che divideremo in due paragrafi:

1° le idee primitive della Grammatica;

2° le idee primitive della Logica, così naturale come riflessa.

Quindi passeremo all'analisi delle idee primitive della Matematica che divideremo pure in due paragrafi:

1° le idee primitive dell'Aritmetica;

2° le idee primitive della Geometria.

Da ultimo procederemo all'analisi delle idee primitive della Fisica in generale, e in particolare della Fisica matematica e della Meccanica razionale.

Uno sguardo supremo ai risultati ottenuti ci per-

Digitized by Google

metterà di raccogliere tutte le idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica in una sintesi finale.

Le applicazioni teoriche e pratiche verranno in conseguenza a porre termine alla prima parte di questo volume.

Digitized by Google

CAPITOLO PRIMO

Le idee primitive della Logica.

§ 1.

Le idee primitive della grammatica.

1. Una facile riflessione ci avverte che delle nove parti che concorrono a formare il discorso, sette possono venire eliminate, perchè sono riducibili logicamente alle altre due: il nome (ὄνομα) e il verbo (ῥῆμα) (1).

Infatti, possiamo sopprimere:

1° l'articolo, perchè non ha una funzione indispensabile nell'umano linguaggio, giacchè in alcune lingue,

---

(1) Questa riduzione delle varie parti grammaticali ora al nome ora al verbo ci dimostra altresì la possibilità di distinguere tutti quanti i termini grammaticali in due categorie:

1° Termini sostanziali;

2° Termini formali.

Tale classificazione, già intraveduta dalle antichissime scuole filosofiche della Grecia e ricomparsa a più riprese nella scienza, fu rimessa in onore dalla filologia comparata moderna, la quale esercitando l'analisi più accurata

Digitized by Google

perfettamente evolute, esso manca del tutto come, per esempio, nella lingua latina;

2° l'aggettivo, perchè la sua differenza dal nome è puramente grammaticale;

3° il pronome, perchè fa le veci del nome rispetto alla sua funzione;

4° la preposizione, perchè esprime una relazione o funzione che tiene le veci del verbo, o si limita solo a determinare più esattamente il valore e l'ufficio dei casi ai quali di solito si prepone;

5° l'avverbio, perchè si può considerare facilmente come una forma irrigidita di alcuni casi e serve in generale a determinare più esattamente l'idea verbale nel modo stesso che l'aggettivo serve a compiere o circoscrivere l'idea nominale;

6° la congiunzione, perchè esprime solo l'idea dei reciproci rapporti fra le cose pensate riducibile alla funzione del verbo;

7° l'interiezione, perchè è solo un'espressione abbreviata equivalente ad una proposizione completa.

2. Ciò premesso rimane a considerare se il nome e il verbo siano o non siano alla loro volta riducibili ad un termine solo.

---

sulle parole è giunta alle radici primitive, che distingue in due classi: le une radici *attributive* corrispondenti alle parole di sostanza che esprimono un contenuto; le altre radici *dimostrative* corrispondenti alle parole di forma che esprimono una funzione. È tuttavia da avvertire che ciò si deve intendere più per la teoria della grammatica, in particolare, cioè per quelle lingue che hanno già una grammatica, che per la lingua umana in genere ai primi stadî del suo processo evolutivo, perchè tutto induce a credere che assolutamente indispensabili come *segni esterni* dell'idea siano soltanto le parole di sostanza (radici attributive).

Digitized by Google

La questione può essere tentata da due punti di vista ben differenti rispetto alla storia e rispetto alla logica pura. Dal punto di vista storico si tratta di decidere intorno alla precedenza cronologica tra il nome e il verbo. Ed a questo proposito lo Smith sostiene la precedenza del verbo, affermando che i nomi sono di meno urgente necessità; Dugald-Stewart sostiene la precedenza dei nomi, affermando che ai verbi si suppliva col gesto (Max Müller, *Letture*, Lett. II). Di questa opinione sono pure il Vico ed il Rosmini, ma lo Heyse, d'accordo coi maggiori filologi, afferma che, superato oramai il periodo antegrammaticale, il sostantivo ed il verbo devono essere considerati di pari valore nell'unità della proposizione, non essendo possibile accordare all'uno la precedenza sull'altro. E tale è appunto la nostra opinione.

D'altronde la ricerca di questa priorità storica ci pare inutile e perfino assurda, dal nostro punto di vista, se si riflette che essa non può giustificarsi senza già ammettere gratuitamente che dei due termini uno sia derivato dall'altro. E ad ogni modo anche se si trovasse che anteriormente alla grammatica esisteva una lingua *senza verbi*, tuttavia, secondo la maggior verosimiglianza, si potrebbe ancora ritenere che questo non derivava dalla mancanza assoluta del concetto del verbo, ma semplicemente dal fatto che colui che parlava con puri nomi monosillabici lasciava al suo uditore la cura di aggiungervi col pensiero le forme corrispondenti all'affermazione ed ai rapporti fra le cose ed i concetti. Lo spirito primitivo insomma *sottintendeva* assai più che non esprimesse, e la funzione dell'affermazione logica, nella quale pare consistere la vita e l'essenza del discorso, vi era tutta interna e latente. Non era dunque il concetto del verbo che mancasse

Digitized by Google

nel giudizio primitivo, ma solo una parola o segno particolare che ne facesse foneticamente le veci.

E poichè dal punto di vista dell'analisi logica la riduzione dei due termini in uno solo ci pare impossibile, ammettiamoli precisamente come primitivi, e passiamo a esaminarne rapidamente le importantissime proprietà fondamentali.

3. Cominciamo dal nome.

Aristotele dice che i nomi sono ciò che rimane della enunciazione o giudizio (ἀπόφανσις, λόγος ἀποφαντικός) levatone il nesso (συμπλοκῆ); τὰ κατὰ μηδεμίαν συμπλοκὴν λεγόμενα ed aveva egli stesso tracciato la divisione radicale dei nomi in due categorie:

1ª τὰ μὲν καθόλου (nomi comuni),

2ª τὰ δὲ καθ' ἕκαστον (nomi proprii);

divisione che noi accettiamo tale e quale.

Il nome comune è quello che si dà ad una specie o collezione o classe qualunque d'individui.

Il nome proprio è quello che si dà ad un individuo per distinguerlo da tutti gli altri della medesima specie.

Anche qui evitando la questione sopra l'origine e la precedenza storica delle due categorie accennate, ci limitiamo ad osservare che queste due categorie del nome (classe — individuo) non soltanto sono famigliari nella Grammatica e in tutti gli ordini delle cognizioni, ma si presentano come assolutamente irreducibili a qualunque analisi che non voglia distruggere il processo logico del pensiero. È vero che anche il nome comune può talora indicare un solo individuo in una più ampia classe di classi, ma questo fatto non distrugge la distinzione suddetta anzi la riconferma, come è noto.

È poi della massima importanza il rilevare che si potrebbero introdurre al posto dei termini: classe e

Digitized by Google

individuo, i due termini equivalenti: contenente e contenuto, i quali raccolti in un concetto supremo potrebbero far attribuire al nome il significato unico e generalissimo della inclusione.

4. Passiamo al verbo.

Noi crediamo che lo stato attuale degli studi logici e filosofici ci dispensi dall'esaminare più minutamente la questione della necessità logica del verbo che fu già dichiarata da Aristotele: ἄνευ δὲ ῥήματος οὐδεμία κατάφασις οὐδὲ ἀπόφασις (*de interpret.*, C. 10, pag. 19, b. 10), cioè " senza verbo non c'è nè affermazione nè negazione ". Quindi di fronte alla molteplicità delle forme verbali una sola ricerca può interessarci: la semplificazione.

Le grammatiche scolastiche continuano ancora a distinguere due specie di verbi: l'uno, il verbo semplice o copulativo " essere " quando ha il puro ufficio di congiungere il predicato al soggetto (Il sole è risplendente); l'altro, il verbo predicativo o attributivo (Il sole risplende) in cui è da comprendersi anche il verbo " essere " quando significa " esistere ". S'aggiunge che fra i due casi vi è una differenza notevole. Nel primo caso il verbo è la semplice affermazione della congiunzione e non si aggiunge alcun termine nuovo. Nel secondo caso il verbo attributivo si può sdoppiare dimostrando così che alla pura copula verbale si aggiunge un termine nuovo cioè il predicato nominale (participiale).

Ma è chiaro che questa differenza fondata sul fatto che nella prima espressione il verbo è diviso dall'aggettivo, ossia verbo e aggettivo sono termini distinti, nella seconda invece il verbo è incorporato coll'aggettivo in un termine solo, ha un valore semplicemente

Digitized by Google

didattico ed estrinseco e non può introdurre una distinzione radicale nel concetto del verbo. Infatti, in ambedue, il verbo fa sempre l'ufficio di attribuire la qualità alla cosa affermandone la convenienza. E siccome l'affermare che un predicato conviene ad un soggetto val quanto l'attribuirglielo, così possiamo dire che ogni verbo è essenzialmente attributivo. Cade pertanto la differenza scolastica fra il verbo copulativo e il verbo predicativo o attributivo, per il fatto che ogni verbo, anzi il verbo, è essenzialmente copulativo e attributivo ad un tempo.

Ciò premesso, già ne segue logicamente l'avvertenza che tutti i verbi sono transitivi. Difatti, a considerare bene la posizione logica del predicato dalla fase che precede il giudizio alla fase unificatrice del giudizio medesimo, si trova che il verbo opera sempre un trapasso in cui il predicato prima indistintamente considerato, è attribuito, cioè aggiunto poscia distintamente al soggetto. In ogni caso è il pensiero che nell'atto unificatore del giudizio trapassa da un termine all'altro mediante la funzione transitiva del verbo, in cui si raccoglie la virtù *discorsiva* dell'affermazione. Da ciò s'arguisce che il verbo esercita sempre una vera e propria funzione transitiva nel giudizio; pare adunque non doversi disconoscere che ogni verbo è ad un tempo affermativo, copulativo, attributivo e transitivo. Ed io sono altresì di parere che se noi possiamo *discorrere* e parlare della realtà, ciò dipende appunto dal fatto che il nostro spirito — in virtù della natura transitiva del verbo — è capace di quel movimento *progressivo* che si richiede tanto nel giudizio quanto nel raziocinio, e pel quale siamo atti a trapassare logicamente di concetto in concetto.

Digitized by Google

5. V'è tuttavia una questione notevole da rischiarare.

Come i verbi comunemente detti intransitivi si potranno ridurre e nel tempo stesso distinguere, se pur farà d'uopo, dai verbi transitivi?

Si tenga per fermo che il dire:

1° a certi verbi si aggiunge un termine solo per esprimere chi fa l'azione, dunque qui l'azione *non passa* fuori del soggetto e questi verbi sono intransitivi,

2° a certi altri invece si aggiungono due termini, uno per esprimere chi fa l'azione, l'altro per esprimere chi la riceve, dunque qui l'azione *passa* fuori del soggetto e questi verbi sono transitivi,

non basta nè per togliere ai primi il carattere " logico „ transitivo, nè per conferirlo ai secondi.

Molto più logico — a parer nostro — è concludere che, se nei primi le azioni si riferiscono solo a chi le fa — per restare nella terminologia comune — questi si devono più precisamente denominare *soggettivi; oggettivi* i secondi nei quali le azioni si riferiscono insieme a chi le fa e a chi le riceve. Ma ciò che non muta nei due casi è la transitività fondamentale della relazione *logica* espressa nei due casi dalla copula, fiancheggiata dal soggetto e dal suo naturale ed unico predicato o attributo conveniente. Ciò che muta invece è semplicemente la formalità estrinseca dell'attributo, il quale nel primo caso è semplice, nel secondo è complesso.

Per trovare quindi il carattere essenziale della transizione logica, noi non abbiamo bisogno di ricercare sopra chi cada l'azione seconda espressa dal verbo comunemente detto attributivo, o per essere più precisi, dall'aggettivo congiunto al verbo attributivo semplice della proposizione (essere); perchè l'oggetto dei verbi

Digitized by Google

comunemente detti transitivi non è altro che un complemento dell'attributo. I così detti verbi intransitivi aggiungono al verbo semplice attributivo un solo termine, l'attributo o, altrimenti detto, il predicato nominale; e per essere transitivi non abbisognano d'altro. I così detti verbi transitivi, invece, all'attributo inerente al verbo semplice attributivo aggiungono ancora un complemento.

Distinguasi dunque nettamente:

1° l'azione logica primaria del verbo semplice che significa in tutti i casi l'attribuzione e la transizione pura dell'affermazione dal secondo termine al primo;

2° l'azione secondaria dell'attributo o predicato che significa solo l'aggiunta d'un'altra attribuzione complementare ad un termine dell'affermazione.

La sola differenza pertanto che passa tra i verbi soggettivi ed oggettivi è questa: i primi costituiscono una proposizione semplice, i secondi una complessa. Insomma ciò che si dice complemento d'oggetto non è altro che complemento d'attributo, e come tale non differisce essenzialmente da tutta la gran classe di quei complementi che s'aggiungono d'ordinario all'attributo della proposizione per determinare variamente le qualità e le azioni che al soggetto si riferiscono.

6. Ma rimane una questione grave. Già da gran tempo i migliori grammatici, nell'intento d'introdurre una grande semplificazione così nella teoria logica come nella pratica grammaticale, tentarono di dimostrare che tutti i verbi sono, in ultima analisi, riducibili al verbo *essere*. E noi non riprenderemmo in esame questo punto se non lo vedessimo contestato, con nuovi argomenti, da un critico di grande valore.

Digitized by Google

Infatti il Couturat (1) nella sua grande opera sopra la logica di Leibniz, intendendo di fare una critica a fondo della logica classica che secondo lui ha impedito a Leibniz di fondare l'Algebra della Logica moderna " par un respect presque inconscient pour la tradition scolastique et pour l'autorité d'Aristote „ (pag. 438), osserva che " le domaine (de la Logique classique) est extrêmement restreint. De toutes les idées de l'esprit humain, il ne comprend que les concepts génériques ou concepts de *classes* (idées générales et abstraites), et de toutes les relations qu'on peut concevoir entre les idées, la Logique classique n'en étudie qu'une: la relation d'inclusion (la relation d'égalité pouvant se définir au moyen de celle-là). Elle se réduit donc, au point de vue logique, à l'étude des jugements de prédication, qui consistent à attribuer un prédicat à un sujet; et, au point de vue mathématique, à la théorie des ensembles considérés sous le rapport de l'inclusion et de l'exclusion.

" Au point de vue grammatical, son domaine peut se définir comme suit: elle n'étudie que les propositions dont la copule est le verbe *être*, et elle n'admet comme termes de ces propositions que des concepts simplement juxtaposés (multipliés l'un par l'autre), de manière à restreindre leur extension par leur mutuelle intersection. Elle exclut du discours tous les cas obliques, toutes les prépositions et tous les relatifs. Elle peut traduire cette proposition: " Le cheval est blanc „ ou encore: " Le cheval blanc „ est jeune, vigoureux, agile, etc. „, mais elle ne peut pas traduire celle-ci: " Le cheval du cocher est blanc comme neige „ et encore moins

(1) Louis Couturat, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*. Paris, F. Alcan, 1901, pagg. 432-433.

Digitized by Google

celle-ci: " Le cheval du cocher mange l'avoine que lui a donnée son maître „. Pourquoi? Parce qu'elle néglige et ignore toutes les relations exprimées par les mots *de, comme, manger, que, donner, lui, son.*

" Or, si imparfait et si fallacieux que soit le langage comme instrument logique de la pensée, il en est encore l'expression la plus complète et la plus variée. Leibniz ne l'ignorait pas, lui qui regardait l'analyse du langage comme la préface indispensable de la Logique. Si l'on considère d'abord les verbes (actifs), ils expriment et affirment (ou nient) une certaine relation spéciale entre leur sujet et leur complément. Sans doute une prétendue *analyse logique* essaie de les réduire tous au verbe substantif *être*, en faisant de la relation un prédicat du sujet. Mais cette analyse ne fait que reculer et déguiser la difficulté: " Paris aime Hélène „ se transforme en " Paris est l'amant d'Hélène „. Le verbe *aimer* est remplacé par un génitif également intraduisible. De même, le génitif: " l'épée d'Évandre „ peut se transformer en un relatif: " l'épée que possède Évandre „, qui est tout aussi intraduisible. Ainsi le verbe actif, le génitif et le relatif sont trois manières différentes d'exprimer une même relation.

" Bien plus: le verbe *être* lui-même concourt à exprimer une foule de relations autres que la relation de prédication: A est égal à B; A est semblable à B; A est plus grand que B; A est le père de B, etc. Dans toutes ces propositions, la copule réelle n'est pas *est*, mais la relation affirmée entre A et B. Et la preuve (1) en est que, si l'on veut convertir ces pro-

(1) Se in questa proposizione, *A è uguale a B*, la copula reale fosse il puro *è*, allora il predicato dovrebbe essere

Digitized by Google

positions, on ne prendra pas pour nouveau sujet le prétendu attribut: " égal à *B* „, " semblable à *B* „ etc., mais bien *B*. Suivant que la relation exprimée par la véritable copule est symétrique ou non, la relation convertie aura le même nom ou un autre nom. Si *A* est le frère de *B*, *B* est le frère de *A*; mais si *A* est le père de *B*, *B* est le fils de *A* „ (pagg. 423, 433, 434).

7. Pigliamo atto anzitutto d'una preziosa affermazione di cui faremo uso nella conclusione del presente paragrafo. Le proposizioni di cui la copula è il verbo *essere* non possono esprimere altro che la relazione di *inclusione*; la relazione pertanto espressa dal verbo *essere* è equivalente alla relazione d'*inclusione*; in altri termini l'affermazione dell'essere è l'affermazione dell'inclusione. Questo valore fondamentale del verbo *essere* fu già, del resto, riconosciuto schiettamente da Aristotele che per indicare il verbo *essere* necessario ai giudizi di predicazione adopera i passivi ὑπάρχεσθαι e κατηγορεῖσθαι — col senso di " essere attribuito, essere riferito, essere predicato, essere affermato, cioè contenere „; mentre adopera gli attivi ὑπάρχειν e κατηγορεῖν — (il quale ultimo, specialmente, perde in Aristotele il valore di " accusare „ e piglia quello più generale di " attribuire „) col senso di " riferire, predicare, affermare, convenire „, cioè sempre col senso di " *inesse*, inerire, essere inerente, essere contenuto „.

---

eguale a B. Ma questo non è perchè nella conversione si prende come soggetto il puro *B*, e non *eguale a B*, dunque la copula reale non è *è* ma la relazione nuova affermata tra *A* e *B*.

Digitized by Google

Τὸ αὐτὸ ἅμα ὑπάρχειν τε καὶ μὴ ὑπάρχειν ἀδύνατον τῷ αὐτῷ καὶ κατὰ τὸ αὐτό — αὕτη δὴ πασῶν ἐστι βεβαιοτάτη τῶν ἀρχῶν: — ἀδύνατον γὰρ ὸν τινοῦν ταὐτὸν ὑπολαμβάνειν εἶναι καὶ μὴ εἶναι (*Metaphys.*, IV (Γ) · 3, pag. 1005, b. 19).

Stabiliamo dunque che la copula *est* ha simultaneamente i due sensi:

1° attivo: contiene (*continet*),

2° passivo: è contenuto (*inest*),

i quali sono appunto le due proprietà fondamentali dell'inclusione relativamente alla partizione del nome: nome comune (classe), nome proprio (individuo).

8. E veniamo alle ragioni del Couturat, il quale per precisare meglio il suo pensiero aggiunge in una nota alla pag. 433: " Cette analyse ne réussit vraiment que pour les verbes neutres ou les verbes actifs pris intransitivement, parce qu'ils expriment un état plutôt qu'une action: " *Paris aime* „ devient: " *Paris est amoureux* „; " *Ego valde potito* „ devient: " *Ego sum magnus potator* „ (Chap. III, § 12). Mais dès qu'on veut indiquer *qui* Paris aime, ou ce *que* je bois, l'analyse " logique „ échoue, justement parce qu'il s'agit d'une relation entre deux " *sujets* „, et non plus de la qualification d'un seul " *sujet* „.

Contro questa dimostrazione dell'*irreducibilità di tutti i verbi al verbo essere* si possono addurre le ragioni seguenti:

In primo luogo è evidente che se fosse possibile dimostrare che un solo verbo attivo è riducibile alla copula *est*, cioè è traducibile colla sola riduzione di inclusione predicativa, l'affermazione della pretesa irreducibilità di tutti i verbi al verbo " essere „ crollerebbe.

Digitized by Google

Ora questa riducibilità si verifica appunto nel verbo attivo " *contenere* ", il quale nel caso della proposizione " *A continet B* " esprime precisamente non una semplice qualificazione del soggetto, come avviene pei verbi neutri o pei verbi attivi presi intransitivamente (caso in cui la riduzione riesce), ma una vera " *relation entre deux* " *sujets* ", *A* e *B*. Sia dunque la proposizione " *A continet B* ".

Notiamo, in primo luogo, che essa è proprio costituita da un verbo attivo (*continet*); quindi che essa può trasformarsi in quest'altra: " *A est continens B* " che contiene il genitivo (τοῦ); da ultimo in quest'altra: " *A est quod continet B* " che contiene il relativo (*quod*); essendo appunto il verbo attivo, il genitivo e il relativo tre maniere diverse di esprimere una stessa relazione intraducibile col puro verbo " essere " secondo il Couturat. Ora è chiaro che la proposizione: " *A continet B* " è riducibile al semplice giudizio di predicazione " *A est B* " avendo noi appunto stabilito col Couturat che il verbo " essere " non può esprimere altro che la relazione d'inclusione, nei due sensi di " *continet* " e di " *inest* " che sgorgano logicamente dal concetto fondamentale dell'inclusione. Dunque in questo caso almeno i due " *sujets* " *A* e *B* si riducono ad un soggetto (*A*) e ad un predicato (*B*), legati insieme dalla pura copula *è* che esprime lo schietto rapporto dell'inclusione. Noi diremo con Leibniz: se " *A continet B* " allora " *praedicatum inest subjecto* " (comprensione); se " *A inest B* " allora " *subjectum inest praedicato* " (estensione). E tuttavia dal punto di vista grammaticale le proposizioni " *A est continens* τοῦ *B* " e " *A est quod continet B* " non dicono niente di più di quest'altra equivalente " *A est B* ".

In secondo luogo si noti che per tradurre la pro-

Digitized by Google

posizione " *A continet B* „ nella equivalente " *A est continens B* „ non s'impone la necessità di portare al genitivo il caso di *B* per effetto del participio " *continens* „, giacchè il participio è un nome verbale come l'infinito e come tale ha comuni col nome e col verbo certe proprietà fra cui — rispetto al verbo — questa importantissima: l'infinito e il participio reggono gli stessi casi che regge il verbo a cui appartengono.

Es.: Io faccio il mio dovere: ποιέω τὰ δέοντα; — Io sono facente il mio dovere: ποιῶν εἰμι τὰ δέοντα; — Io ho un cavallo: *habeo equum;* — Io sono avente un cavallo: *sum habens equum;* — Io vedo il sole: *video solem;* — Io sono vedente il sole: *sum videns solem;* — Il cavallo mangia la biada: *equus edit avenam;* — Il cavallo è mangiante la biada: *equus est edens avenam;* — Tiresia deplora la sua cecità: *Tiresias deplorat caecitatem suam, Tiresias est deplorans caecitatem suam; Tiresias est qui deplorat caecitatem suam;* — Paride ama Elena: *Paris amat Helenam;* — Paride è amante Elena: *Paris est amans Helenam.*

Anzi, a guardare sottilmente le cose, scrivere: " *Paride è l'amante di Elena* „ è trasformare il participio dato in participio sostantivo (l'amante = l'*uomo* amante). Ora, non solo noi non abbiamo punto bisogno di fare un participio sostantivato mediante l'articolo, ma non dobbiamo farlo assolutamente, perchè quando si scioglie il verbo attivo transitivo d'una proposizione di questa forma " *A* (verbo transitivo) *B* „ nel verbo *sum* unito ad un participio e si vuole ottenere una proposizione perfettamente equivalente, tanto nel senso dell'azione quanto nell'uso del caso di *B*, bisogna ritenere che allora il participio non deve essere adoperato aggettivamente cioè nel senso di uno *stato che dura* (Es.: *Germani appetunt gloriam; Germani sunt*

Digitized by Google

appetentes gloriae), ma invece il participio deve continuare ad esprimere *l'azione in genere*, nel qual caso rimane la costruzione coll'accusativo dell'oggetto (Es.: *Germani appetunt gloriam; Germani sunt appetentes gloriam*). Tutte le grammatiche elementari fanno differenza tra: " *amans gloriam* „ che vuol dire " *qui amat* „ cioè *indica non lo stato ma l'azione*, e " *amans gloriae* „ che significa " amante della gloria „ cioè *indica non l'azione ma lo stato.*

Possiamo dunque concludere osservando che la comparsa del genitivo dopo il participio è una peculiarità che si presenta solo nel caso che si voglia alterare la natura logica dell'azione espressa nel verbo attivo, sostituendo all'idea d'azione l'idea di stato. Ma fuor di questa circostanza che non è la nostra si conserva il caso di prima. Ma il Couturat non è pago.

9. V'ha una folla di relazioni verbali, egli scrive, che sono espresse mediante il concorso del verbo " essere „ e tuttavia sono differenti dalla relazione di predicazione:

A è uguale a B; A è simile a B; A è più grande di B; A è il padre di B.

In tutte queste proposizioni la copula reale non è punto *è*, ma la relazione affermata tra *A* e *B*. Infatti: se in questa proposizione ad es. " *A* è uguale a *B* „ la copula reale fosse il puro *è*, allora il predicato non dovrebbe essere *B*, ma " *eguale a B* „; ora questo non è, perchè nella conversione quando si pone il predicato al posto del soggetto, si prende come soggetto il puro *B* e non " *eguale a B* „; dunque la copula reale non punto *è*, ma è la relazione nuova affermata tra *A* e *B*.

In breve le affermazioni del Couturat sono: Se tra

Digitized by Google

la copula " *è* „ ed il predicato *B* entrano sostantivi, aggettivi o participii, cioè nuovi termini relativi in genere esprimenti nuove e intraducibili relazioni logiche, allora:

1° il verbo della proposizione è propriamente " *è eguale a* „, e non " *è* „;

2° il predicato della proposizione è propriamente " *B* „ e non " *eguale a B* „.

10. Ora noi dimostreremo per contro che in tutti questi casi:

1° la copula reale resta sempre " *è* „ e non " *eguale a* „;

2° il predicato reale resta sempre " *B* „ e non è punto necessario che sia " *eguale a B* „, come il Couturat fa dire impropriamente alla Logica classica.

Infatti tutti questi *termini nuovi* che si possono introdurre tra la copula e il predicato sono divisibili in due classi:

1° termini simmetrici (eguale a, simile a, fratello di.., ecc.);

2° termini non simmetrici (maggiore di, padre di.., ecc.).

Questa divisione fu già intraveduta dal Couturat, ma egli non ne ricavò alcun frutto.

A) I termini simmetrici sono quelli che di fronte alla funzione logica della inclusione espressa dalla copula *è*, indicano che i loro soggetti e predicati *A* e *B* quantitativamente equivalenti sono ad un tempo " contenente e contenuto „ ($A \lesseqgtr B$) e quindi nella conversione possono essere scambiati di posto perfettamente; come ad esempio le proposizioni:

Digitized by Google

[A] è [uguale a] [B];

[A] è [simile a] [B];

[A] è [fratello di] [B]; ecc.;

si convertono nelle equivalenti:

[B] è [uguale a] [A];

[B] è [simile a] [A];

[B] è [fratello di] [A].

Qui l'inclusione ha nello stesso tempo valore attivo e passivo ($A \lesseqgtr B$)

Est = *Continet* e

B) I termini non simmetrici invece sono quelli che di fronte alla funzione logica della inclusione espressa dalla copula *è*, indicano che i loro soggetti e predicati A e B non sono ad un tempo " contenente e contenuto „ ma che l'uno solo è " contenente „ e l'altro è " contenuto „ ($A > B$ oppure $A < B$) e quindi nella conversione non possono esser scambiati di posto fuorchè mantenendo il loro proprio valore caratteristico o di contenente o di contenuto e mutando il genere della copula (inclusione) di attivo in passivo o viceversa. Come, ad esempio, la proposizione " A è maggiore di B „ è equivalente a quest'altra:

[il contenente A] è maggiore del [contenuto B],

non si può convertire fuorchè scrivendo:

[il contenuto B] è minore del [contenente A].

Digitized by Google

E qui l'inclusione ha soltanto il valore fisso o di attivo ($A > B$) o di passivo ($B < A$).

Ora queste considerazioni ci permettono primieramente di comprendere che tutte le espressioni formate da termini relativi non simmetrici sono sempre eminentemente transitive e potrebbero essere considerate come la conclusione di un sillogismo elittico, di cui il termine medio è appunto rappresentato da quel termine relativo che s'interpone tra la copula e il predicato. Infatti i due termini estremi A e B si affermano convenienti o ripugnanti fra loro secondo che posti in relazione con una terza idea x, contenente ($>$), contenuto ($<$), contenente o contenuto ($\lesseqgtr$); l'uno vi si trova conveniente e l'altro no, per es.: ($A = x$, $x > B$, dunque $A > B$). Anzi in linea generale ogni proposizione della forma "A è B" può essere considerata come la conclusione di un sillogismo elittico; A è x, x è B, dunque A è B, in cui noi non dobbiamo stupirci che non figuri il termine medio (x) esplicito perchè il sillogismo non è che un modo di eliminazione nell'affermazione simultanea. Secondariamente ci dimostrano l'inesattezza della tesi del Couturat in una maniera semplicissima. Infatti:

1° Se il termine relativo è simmetrico, per es. *A è uguale a B*, noi riuniamo A e B in un solo soggetto, e scriviamo: *A e B sono eguali.* Allora è chiaro che il termine relativo *eguale* non conviene al verbo, come vorrebbe il Couturat, ma tanto al soggetto quanto al predicato, essendo appunto il termine medio del sillogismo elittico. Insomma la copula resta sempre *è* e non *eguale a;* essendo vero soltanto in questo caso simmetrico che il termine *eguale*, come conviene al soggetto A conviene al predicato B.

2° Se il termine relativo non è simmetrico, per

Digitized by Google

es. *A è maggiore di B*; noi riuniamo *A* e *B* in un solo soggetto, e scriviamo: *A e B sono in un rapporto d'inclusione* tale che " *A* è maggiore „ e " *B* è minore „ rispettivamente. Allora è chiaro che il termine *maggiore* non conviene al verbo, come vorrebbe il Couturat, e neppure conviene al predicato *B*, ma soltanto al soggetto. Insomma la copula reale resta sempre *è* e non *maggiore di*, non essendo punto richiesto dalla logica classica che al predicato *B* convenga il termine *maggiore*, allorquando si comprende che gli conviene il termine *minore*.

Noi annettiamo grande importanza a questi risultati, perchè essi ci dimostrano che un termine nuovo può entrare in una proposizione semplice, dello schema *A est B* in differenti maniere, dirette ed oblique, ma le varie forme grammaticali risultanti non impediscono che le varie operazioni, tanto simmetriche quanto asimmetriche, di cui si tratta, siano riducibili al rapporto d'inclusione e d'esclusione, cioè al giudizio di predicazione. Nessuna dunque di quelle relazioni che si traducono nel linguaggio ordinario con uno di questi termini relativi: eguale a, simile a, più grande che, ecc., " échappent aux prises de la Logique classique „ (p. 433).

Possiamo raccogliere in poche parole questo esame del concetto di verbo. Tutti i verbi sono riducibili al solo verbo copulativo, attributivo e transitivo *essere* il quale si risolve nell'affermazione fondamentale della *inclusione*.

Concludiamo.

11. L'analisi grammaticale mette capo pertanto a due termini che si possono considerare come primitivi:

Digitized by Google

I. *Nome* { Classe o contenente, nome comune;
Individuo o contenuto, nome proprio;

II. *Verbo* (Inclusione: essere contenente, essere contenuto).

§ 2.

Le idee primitive della logica naturale e della logica riflessa.

1. Le nostre ricerche, nel campo della logica generale, si dividono in due parti:

1° Quali sono le idee primitive che si adoperano nell'arte logica naturale (linguaggio comune);

2° Quali sono le idee primitive che si adoperano nell'arte logica riflessa (linguaggio scientifico).

L'ordine da noi scelto è giustificato dal fatto che dei termini che si usano in logica pura, alcuni appartengono direttamente al linguaggio ordinario e sono adoperati con significato identico ma indefinito, ed altri, adoperati con un significato diverso ma ben precisato, sono poi definiti regolarmente mediante definizioni che fanno uso di termini del linguaggio comune.

2. Cominciando pertanto dalla prima parte *(logica naturale)* noi possiamo ridurre l'analisi a quei termini logici che sono proprii delle più elementari ed immediate verità logiche che trovansi in qualunque enunciazione possibile dello spirito umano, perchè soltanto il discorso *enunciativo* è proprio di questa dottrina naturale che stiamo ora esaminando (1).

---

(1) ARISTOTELE: ὁ δὲ ἀποφαντικὸς τῆς νῦν θεωρίας. *De interpret.*, C. 4, pag. 17, a. 1.

Digitized by Google

Che cosa è l'enunciazione?

Aristotele ha scritto: Ἔστι δὲ εἷς πρῶτος λόγος ἀποφαντικὸς κατάφασις, εἶτα δὲ ἀπόφασις (*de interpret.*, C. 5, pag. 17, a. 8).

" L'enunciazione di per sè una è primieramente affermazione, poscia negazione ". Questa proposizione è per noi e per tutti della massima evidenza. Non è dunque necessario presupporre cognizioni logiche più o meno vaste per comprendere la verità dell'affermazione seguente: Ogni più semplice proposizione possibile — qualunque poi essa sia — è sempre l'*affermazione di qualche cosa.*

Quest'affermazione suggerita dal più elementare buon senso ci autorizzerebbe adunque a considerare " l'affermazione " come il primo ente dell'arte logica naturale che occorre assumere senza definizione.

Ma il solo *porre* quest'affermazione: " *Assumiamo, cioè poniamo come ente logico primitivo, l'affermazione* ", ci impone la necessità di convenire che il concetto espresso dai verbi: porre, assumere e simili (che noi non possiamo fare a meno dall'adoperare volendo ammettere checchessia), o è pur esso un ente logico primitivo, come l'affermazione, o almeno è riducibile ad esso.

Ora in primo luogo l'uso del concetto di " porre " è estesissimo in tutte le lingue antiche e moderne, ed ha dato origine ad una folla di parole derivate: θῆσις ... ὑπόθησις; *positio; suppositio*, tesi, ipotesi; posizione, supposizione; *propositio*, proposizione; *compositio*, composizione; premessa; τεθέντων τινῶν: *quibusdam positis*, ecc., che esprimono concetti affini o equivalenti; in secondo luogo i termini appartenenti alle varie scienze che si adoperano comunemente per indicare l'affermazione sono innumerevoli:

Digitized by Google

Assumere, ammettere, accusare, adoperare, adottare; concedere, concepire, considerare, contare; dare, designare, dire, determinare; enunciare, esprimere, essere, esistere; fare, fissare, fingere; introdurre, indicare, includere; limitare; mettere; porre, posare, prendere, premettere, proporre; ritenere, riferire, ridurre, rendere; scrivere, segnare, significare, stimare, stabilire, scegliere, supporre; tenere, trattare, usare; e via dicendo.

Noi poniamo anche il verbo " porre " in questo elenco dei sinonimi, più o meno esatti, del verbo " affermare ", perchè è chiaro che le espressioni: " siano posti, dati, ammessi, introdotti, stabiliti, scritti, ecc., i fatti *a* e *b* " (ad esempio), sono perfettamente equivalenti a quest'altra: " siano affermati *a* e *b* ", cioè " siano *a* e *b* ". Che il concetto logico del verbo " essere " sia poi sinonimo del concetto " affermare " si capisce dal fatto che il pensiero esiste per la prima volta quando *pone* ed *afferma* qualche cosa e non ci è possibile esprimere la cosa con parole diverse. Ciò posto, è giocoforza concludere che se i concetti dell'*affermare* e del *porre* non hanno tutti i significati speciali e proprii delle parole riferite nell'elenco, in fondo a tutte nondimeno si trova un *significato convenzionale costante*, per cui se noi troppo spesso adoperiamo questi verbi promiscuamente, finiamo poi sempre, in ultima analisi, per voler indicare una stessa cosa.

Elimineremo dunque naturalmente tutti quei termini che non sono altro che forme improprie ed inutili dello stesso concetto; inoltre siccome in una serie di termini perfettamente sinonimi basta dichiararne uno solo perchè risultino dichiarati tutti gli altri, così sceglieremo il solo concetto dell'affermazione, ma continueremo a servirci liberamente degli altri, per conservare

Digitized by Google

la varietà del linguaggio, per quanto il rigore e la semplicità del metodo potrebbe consigliare di sopprimerli.

3. Posto dunque come ente primitivo della logica naturale il concetto dell'affermare, cioè l'affermazione, vediamone le proprietà.

Aristotele definisce l'affermazione in questo modo: κατάφασις δέ ἐστιν ἀπόφανσίς τινος κατά τινος. ἀπόφασις δέ ἐστιν ἀποφανσίς τινος ἀπό τινος (*de interpret.*, C. 6, pag. 17, a. 25). Cioè: Affermazione è poi *enunciazione di una cosa ad un'altra;* e negazione è enunciazione di una cosa da un'altra.

Questa definizione è tutt'altro che rigorosa perchè il concetto dell'enunciazione è appunto un termine che non si definisce senza far uso del concetto dell'affermazione. Infatti l'ἀποφάνσις serve a definire la κατάφασις e la κατάφασις serve poi a definire l'ἀποφάνσις (1).

Ma la proprietà fondamentale dell'affermazione non potrebbe essere dichiarata più lucidamente.

Infatti risolviamo etimologicamente il vocabolo " affermare ": troviamo da una parte il verbo " fermare ", dall'altra la preposizione *a, ad.* Ora il verbo " fermare " sinonimo di fissare, arrestare, chiudere, stringere, riunire, stabilire, limitare, porre, isolare, dare, ecc., indica che qualche *cosa* (oggetto qualunque, elemento, ente, fenomeno, punto, dato, fatto, termine, ecc.) può o deve essere fissata, fermata, limitata, data, posta, ecc. La preposizione *a, ad* indica un " moto a " che noi non

(1) Ἔστι δὲ πρῶτος λόγος ἀποφαντικὸς κατάφασις, εἶτα δὲ ἀπόφασις (l'apofansi è la catafasi). Κατάφασις δέ ἐστιν ἀπόφανσίς τινος κατά τινος· ἀπόφασις δέ ἐστιν ἀποφανσίς τινος ἀπό τινος (la catafasi è l'apofansi).

Digitized by Google

possiamo figurarci altrimenti che come il passaggio, il trapasso, la transizione, l'attribuzione, la relazione, o il riferimento d'un punto ad un altro, o rappresentazione di punto in punto.

Il vocabolo " affermazione „ potrebbe per tal modo essere tradotto con queste frasi equivalenti: *fissazione di una cosa ad un'altra cosa, riferimento, attribuzione, apposizione di una cosa ad un'altra* (κατά τινος), ecc.

4. Il concetto primitivo dell'affermazione si mostra dunque risolvibile in queste due altre affermazioni:

1° l'affermazione di due cose distinte (oggetti, termini, elementi, dati, fatti, fenomeni, enti, idee);

2° l'affermazione di un riferimento, o relazione, o moto ideale dall'una all'altra.

In altri termini: l'uomo non può pensare, cioè affermare nulla senza l'idea determinata delle cose (essere determinato); e il pensiero, cioè l'affermazione dell'essere determinato, vale a dire dell'essere in un limite qualunque, non si può avere senza il pensiero cioè l'affermazione d'un rapporto qualunque fra le cose (1).

(1) Da quest'analisi risultano altresì alcune conseguenze notevoli che non vogliamo omettere, per quanto non abbiano qui che il puro valore d'un'amplificazione retorica. Senza definire ciò che è indefinibile, noi siamo giunti a formarci un concetto assai più chiaro e distinto del fatto dell'affermazione e di alcune sue proprietà fondamentali che sono ordinariamente indistinte; e possiamo ben riconoscere che questo risultato si è ottenuto per via di una serie di *limiti* che noi abbiamo introdotto nel significato dei vari *termini*. Tale è dunque la natura della nostra mente che per pensare a qualsivoglia cosa ricorre sempre al concetto di limite che si presenta inseparabile da ogni rudimentale affermazione così del pensiero come dell'essere, e ciò forse può servirci a dimostrare che pensare da solo l'essere indeterminato non vuol

Digitized by Google

5. Concludiamo pertanto questa ricerca intorno alla classificazione dei concetti primitivi della logica na-

---

dire *pensare l'essere senza pensare il limite*, ma solamente *pensare il limite indistinto*, giacchè questi termini: l'indistinto, l'indeterminato, l'indefinito, ecc., non sono già la negazione del limite, ma solo una fase, per così dire, storica dell'affermazione del limite stesso.

Poichè un oggetto assolutamente unico non basta per determinare un atto di affermazione, il quale, nella forma più semplice, suppone almeno sempre due oggetti o termini distinti in un rapporto; ne risulta che, come non possiamo porre l'esistenza di un fatto unico, cioè assolutamente isolato, così non possiamo nè affermare, nè conoscere altrimenti la realtà che come un gruppo di fenomeni. Dunque per noi ogni affermazione è sempre una cotal composizione di fenomeni, sia che enunci una verità, sia che enunci un errore, giacchè, come nota acutamente Aristotele: « Ἐν οἷς τὸ ψεῦδος καὶ τὸ ἀληθές, σύνθεσίς τις ἤδη νοημάτων ὥσπερ ἓν ὄντων » (*de An.*, III, 6, pag. 430 a, 27 sg. Bekker).

Per poco che si rifletta intorno a queste conclusioni, non si tarderà a riconoscere che ogni affermazione non è altro che la posizione di un limite o di un complesso di limiti che fa lo stesso. La nostra intelligenza non può nulla conoscere fuori dello schema di limite, vale a dire dell'essere, giacchè il nulla stesso ci si afferma come un limite negativo; in altri termini il concetto di limite si afferma anche quando si nega.

Che altro è affermare se non porre e per conseguenza limitare? e che altro è limitare se non distinguere, cioè porre un qualche limite, come un dato reale od ipotetico da cui qualche altro dato si esclude?

Non v'ha nè affermazione senza limite, nè limite senza affermazione nel dominio della conoscenza. E gli esseri non sono altro che complessi di limiti legati da funzioni particolari; e il mondo per noi non è altro che il sistema della limitazione tanto nella realtà quanto nel pensiero. Così ne segue che ogni affermazione può dirsi semplice solo limitatamente, ma in verità è sempre un composto. Ogni affermazione reale è quindi *sintetica*, nessun elemento separato assolutamente, essendo affermabile senza condizione e di per sè solo. L'assoluto deve essere per conseguenza rigettato col-

Digitized by Google

turale, rammentando che l'analisi logica mette capo ad un concetto che si può considerare come primitivo: il concetto dell'affermazione di limite, il quale però non

---

l'uno puro, perchè non è che a forza di relazioni che si giunge a definirlo, quella cosa medesima che indi, contraddittoriamente, si afferma non essere relativa.

Essere, limite, relazione sono pertanto tre termini che si confondono fra loro nella coscienza umana, e noi ci serviamo sovente di questa confusione, perchè balza agli occhi di tutti che l'affermazione nuda dell'essere reale ed obbiettivo non può farsi senza l'affermazione contemporanea di limiti o di relazioni, quali che siano, di un essere che può certamente esistere in *un* limite.

Ogni essere è costituito da un limite o da un sistema di limiti che ne conduce e ne regola l'esperienza. Riconosciamo dunque — senz'alcuna difficoltà — che anche le definizioni di quei termini che sgorgano immediatamente dalla virtualità del concetto d'affermazione — come quella del limite, cioè della posizione dell'essere e della relazione — sono una impossibilità logica; perchè nel caso nostro, essere senza limite e limite senza essere sono vocaboli spogli d'ogni significato.

Genericamente l'essere è il nome volgare di limite e l'essere assoluto, senza limiti, senza relazioni, negando il limite, spezza l'affermazione e si nega da sè medesimo, se è vero che il dire che una cosa è o non è equivale a dire: certi limiti sono o non sono posti o, ancor più brevemente, certi limiti sono o non sono.

Ma, a guardare sottilmente la natura ed il valore della nostra coscienza affermante, è appunto da questi due fatti ricordati più avanti: la posizione del limite e il riferimento, che ne risultano due altri veramente mirabili, vale a dire: la transizione del limite medesimo e la composizione del differente. Infatti se lo spirito umano nell'atto dell'affermazione appena vuol porre un termine qualunque, deve porre un limite e per conseguenza se esso finisce sempre col porre due termini diversi, cioè, grossolanamente parlando, qualche cosa da una parte del limite e qualche altra cosa dall'altra, congiungendoli però coll'affermazione del loro inseparabile rapporto; allora è chiaro che l'atto dell'affermare comprende

Digitized by Google

avrebbe alcun senso se non si risolvesse in due altre affermazioni (due termini in un rapporto), così immediatamente congiunte con esso e congiunte in pari

---

questi tre momenti logici distinti e pure inseparabili e contemporanei fra loro:

1° la posizione di un termine (tesi);
2° l'opposizione dell'altro (antitesi);
3° la composizione loro (sintesi).

Ora che cosa vuol dire quest'espressione: lo spirito allorchè vuol porre un termine è sempre costretto a porne anche un altro, cioè ad opporre un altro, se è vero che un oggetto assolutamente unico non basta per determinare un atto di affermazione?

Per noi questo fatto indica chiaramente che lo spirito umano nell'atto dell'affermare, esplica come una virtù projettiva o transitiva la quale pone un limite, e nel tempo stesso lo sorpassa, se è vero che limitando non solo si fissa l'orizzonte dello sguardo cogitativo ma altresì lo si apre.

Per continuare una metafora, che, ben lungi dall'essere una semplice comodità momentanea della questione, è una vera esigenza così del linguaggio come del pensiero umano, l'idea di limite indica non solo il di qua ma anche il di là del limite medesimo, nè altro facciamo — in ultima analisi — acquistando la cognizione di un fatto, fuorchè disegnare una figura determinata in un campo circostante indeterminato, o segnare un punto in un campo, o trapassare collo spirito da punto in punto, o rappresentarci semplicemente un punto in un altro punto, sempre per la virtù transitiva o antitetica del concetto dell'affermazione di limite. Non basta. Quale è il significato logico e gnoseologico del terzo fatto presentato dal concetto uno-trino dell'affermazione, cioè della *composizione* simultanea dei termini?

I due primi momenti (posizione, opposizione) affermano che i fenomeni sono inseparabili dai limiti (1), dunque l'oggetto conclusivo dell'affermazione non può essere mai nè il semplice fenomeno, nè il semplice limite o rapporto, ma deve essere tanto il fenomeno nel limite e pel limite, quanto

---

(1) Un fenomeno senza un limite è impensabile e viceversa.

Digitized by Google

tempo fra loro che si possono considerare ancora come primitive:

1° affermazioni di *oggetto* (enti, cose, termini, elementi, dati, fatti, fenomeni, idee);

2° affermazione di *rapporto*.

Queste riduzioni possono presentarsi anche così:

1° Oggetto { classe (enti, cose, termini ...);
individuo (un ente, una cosa ...);

2° Rapporto.

6. Passando ora alla seconda parte, cioè all'analisi delle idee primitive della *logica riflessa*, ci sembra sufficiente limitare le nostre ricerche a quella serie di termini che s'incontrano nella teoria del giudizio, sopra il quale si eleva l'intero edifizio della logica pura. La quale si divide precisamente in tre parti: dell'idea (o concetto), del giudizio e del raziocinio.

---

il limite nel fenomeno e pel fenomeno, cioè tanto l'esistenza nella comparazione e per la comparazione, quanto la comparazione nell'esistenza e per l'esistenza.

È chiaro che il terzo momento non è un'aggiunta gratuita, poichè se da una parte è innegabile che la duplicità dei termini deriva dal semplice fatto dell'affermazione, cioè della posizione di limite, dall'altra è parimenti innegabile che, essendo i due termini realmente indivisibili nel fatto della unica affermazione, tutti questi momenti si riassumono nella composizione integrale di uno solo. Ciò vuol dire che ogni affermazione non è soltanto una tesi ed un'antitesi, ma sopratutto una sintesi. Lo spirito, insomma, nel fatto della affermazione, prima pone dei limiti, poi li oltrepassa per riaffermarli sotto forma di un limite nuovo, quindi si può comprendere che le interrotte affermazioni onde s'intesse il traslato dell'umana conoscenza non sono altro che un perenne rinnovamento di forme che vanno e tornano, si fanno e si rifanno

come piante novelle
rinnovellate di novella fronda.

Digitized by Google

Nella logica pura l'ente logico per eccellenza è l'*idea* (o concetto), naturalmente non considerata dal punto di vista nè psicologico nè materiale, ma solo dal punto di vista *formale*, cioè in quanto ogni idea ha un ordine in sè, una connessione coi suoi elementi e si connette essa stessa con altre idee. Per questo riguardo — come afferma il Cantoni — le idee si presentano nella logica pura come una molteplicità di *elementi omogenei* fra loro, così nei loro elementi come nei loro composti che sono sempre idee, analogamente ai multipli e sottomultipli delle quantità che sono sempre quantità.

7. Ora importa sopra tutto distinguere — alla maniera classica — i giudizi dove i concetti sono congiunti, dai concetti stessi all'infuori del giudizio e ridurre questi ultimi alle loro ultime classi.

Questa ricerca è nota sotto il nome di *problema delle categorie.*

Io mi dispenso dall'esaminarne particolarmente le varie soluzioni storiche proposte, e mi limito ad esporre i risultati ottenuti secondo il procedimento seguente.

Fare la classificazione di tutti i concetti logici possibili, vuol dire fare la classificazione di tutti gli elementi possibili del giudizio. Ora gli elementi non solo possibili ma indispensabili del giudizio logico sono divisibili, com'è noto, in due parti:

1° elementi *materiali* o *quantitativi* del giudizio (due concetti, subbjetto e predicato);

2° elementi *formali* o *qualitativi* del giudizio (la relazione di convenienza o discrepanza tra essi rappresentata nella proposizione dal *verbo*).

Dunque tutti i concetti logici possibili devono essere parimenti divisibili in due classi:

Digitized by Google

1° concetti di materia o quantità;
2° concetti di forma o qualità.

Ma la considerazione della *materia*, cioè dei due concetti o termini del giudizio, dà luogo ad un'altra suddivisione, dovendosi appunto tener conto della quantità o estensione materiale dei due concetti medesimi, che può presentarsi così:

1° concetti di materia contenente;
2° concetti di materia contenuta.

I concetti di contenente sono presi in tutta l'estensione della loro materia (universali). I concetti di contenuto sono presi in parte dalla loro estensione materiale (particolari) (1). Per contro la considerazione della *forma*, cioè della relazione espressa dal verbo, dà luogo ad un'altra suddivisione dovendosi appunto tener conto della qualità della relazione stessa che può presentarsi così:

1° concetti di forma affermativa (concetti affermativi);
2° concetti di forma negativa (concetti negativi).

È vero che nella teoria ordinaria della logica pura la considerazione della *forma* del giudizio ci porge una triplice divisione: qualità, modalità e relazione, dove ognuna di esse è ancor suddivisa triplicemente. Ma noi riduciamo la relazione alla forma o qualità ed eliminiamo la modalità perchè ci sembra che abbia un valore più psicologico che logico.

Così la divisione dei concetti in due classi: concetti

(1) È quasi inutile avvertire che i concetti singolari o individuali rientrano nelle due classi precedenti, come avviene per le proposizioni singolari di fronte alle universali e alle particolari.

Digitized by Google

di materia e concetti di forma, corrisponde precisamente a quelle due capitalissime divisioni delle proposizioni secondo la *quantità* (proposizioni universali o particolari), o secondo la *qualità* (proposizioni affermative o negative) che furono riassunte nei due versi notissimi delle Scuole (1).

8. Anzi, poichè in fondo in fondo non vediamo differenza apprezzabile fra le due coppie *materia* e *forma*, secondo cui si classificano gli elementi del giudizio, e *quantità* o *qualità*, secondo cui si classificano le proposizioni, nè vantaggio alcuno a mantenere distinta la terminologia, così d'ora innanzi useremo liberamente e univocamente tanto l'una quanto l'altra espressione. Noi ammetteremo cioè che tutta la teoria della logica pura, dall'idea al giudizio, al raziocinio, si possa esprimere e costruire sopra quell'unica e primitiva divisione che abbiamo accennato, in modo tale che il tutto guadagni in regolarità ed in comprensibilità.

Se ora a quei concetti di *materia* o *quantità* che abbiamo detto universali e particolari facciamo corrispondere i concetti equivalenti di contenente e contenuto, di classe e di individuo, ecc.; e analogamente a quei concetti di *forma* o *qualità* che abbiamo detto affermativi o negativi facciamo corrispondere i concetti equivalenti di inclusione e di esclusione — in base appunto ai risultati ottenuti nel capitolo antecedente — e se quindi componiamo opportunamente i primi coi secondi per ottenere un giudizio qualunque (due termini in un rapporto), ne nasce che qualunque

(1) « Asserit *A*, negat *E*, verum universaliter ambae,
« Asserit *I*, negat *O*, sed particulariter ambae ».

Digitized by Google

relazione logica fra due concetti assume un vero carattere d'inclusione.

I due termini trovano posto nel soggetto e nel predicato, e il rapporto logico nel verbo.

Il soggetto e il predicato sono niente altro che due idee di materia o quantità (universali — particolari; contenente — contenuto; classe — individuo, ecc.). Il verbo è niente altro che un'idea di forma o qualità (affermazione o negazione, inclusione o esclusione, ecc.) che si indica comunemente col nome di rapporto o relazione logica (1).

9. Concludiamo pertanto questa ricerca intorno alla classificazione delle idee della logica pura, indicando che l'analisi logica mette capo a due affermazioni o idee che si possono considerare come primitive:

1° idea di materia o quantità;

2° idea di forma o qualità o relazione.

E per quanto queste due affermazioni elementari non siano altro che vere e proprie idee, tuttavia non vediamo alcun inconveniente ad esporle più precisamente nella forma seguente:

I. *Idea* { *Classe, contenente;* / *Individuo, contenuto;*

II. *Relazione (Inclusione, esclusione).*

---

(1) Sarebbe forse bene — a parer nostro — adottare sempre il concetto leibniziano dell'affermazione dell'inclusione o dell'esclusione logica (contenente-contenuto) invece del concetto del tutto e della parte, perchè il tutto eccede sempre la parte, mentre il contenente e il contenuto possono talora essere uguali nei due termini del giudizio, come avviene appunto nelle affermazioni di due termini reciproci: $A \lesseqgtr B$.

Digitized by Google

Ora basta il semplice confronto fra le due idee primitive della logica naturale: *oggetto* e *rapporto;* e queste due idee primitive della logica pura: *idea* e *relazione*, per concludere che le due coppie sono perfettamente riducibili ad una formula sola, esprimente le due idee primitive ed irreducibili di tutta quanta la logica generale.

Digitized by Google

CAPITOLO SECONDO

Le idee primitive della Matematica.

§ 1.

Le idee primitive dell'Aritmetica.

1. Applicando alla teoria dei numeri gli stessi criterî adoperati finora circa la teoria della Grammatica, della Logica naturale e della Logica riflessa, noi possiamo introdurre immediatamente una grande semplificazione nella nostra ricerca:

1° distinguendo le idee dalle proposizioni;

2° distinguendo le idee primitive dalle idee derivate.

Riguardo al primo còmpito i più illustri matematici contemporanei (1) sfrondando le secolari e interminabili logomachie a cui andò soggetta la questione per opera di matematici e di filosofi d'ogni scuola, dopo un'analisi accuratissima e rigorosa trattata con gli strumenti sempre più perfezionati della logica matematica, riuscirono a porre sopra solide basi alcuni

(1) Cfr. « Rivista di Matematica », 1901: *Sul concetto di numero.* Nota di PEANO.

Digitized by Google

punti fondamentali che ora si ammettono comunemente come irreduttibili.

Riassumiamo dapprima i risultati finora ottenuti nel campo dell'analisi aritmetica, desumendoli liberamente dall'ottimo *Manuale* del Burali-Forti, il quale facendo uso dei segni adottati per il *Formulario di matematica* del Peano e con una felice scelta di numerosi esempi tratti dal campo della matematica elementare, riuscì a rendere, non solo possibile, ma perfino attraente la lettura del suo libro " anche a chi non possiede nozioni di matematica superiore ".

2. Dei termini che si usano in aritmetica, parte appartengono al linguaggio comune, parte al linguaggio strettamente aritmetico. Poichè questi ultimi sono definiti regolarmente facendo uso dei primi, fissiamo la nostra attenzione sopra i principali di questi, cioè sopra i seguenti termini: *eguale, somma, maggiore, minore, differenza, prodotto,* dei quali vogliamo vedere se possiamo servirci per definire tutti gli altri.

Ora è della massima importanza il rilevare che ammesso noto il significato dei termini: *eguale, somma* (e quindi del segno $+$ che, in certo modo, corrisponde a *somma*) possiamo definire i termini:

1° maggiore, minore (e quindi i segni $>$, $<$);
2° differenza (e quindi il segno $-$);
3° prodotto (e quindi il segno $\times$).

Infatti:

1° Dire che il numero a *è maggiore del* numero b equivale a dire che a è la somma di b con un numero. In altri termini: " Diciamo che il numero a è maggiore del numero b, quando a è la somma di b con un numero ". In modo analogo: " Dire che a è minore di b *è lo stesso che dire*: b è maggiore di a ".

Digitized by Google

2° Il termine *differenza* si definisce coi termini *eguale, somma,* dicendo: " Un numero si dice differenza di altri due disuguali, quando sommato col minore di essi dà per somma il maggiore "; quando la frase: *disuguali* significhi *uno maggiore dell' altro,* e non *non uguali,* il che implica altre proprietà dei numeri.

3° Una delle definizioni qualche volta usata di *prodotto* è la seguente: *Prodotto di a per b,* $a \times b$, *è la somma di b numeri uguali ad a.* Quando sia noto ciò che significa somma di b numeri eguali ad a tale definizione è esatta. Restano i due termini (dei quali ci siamo serviti per definire gli altri):

A) Eguale;

B) Somma.

A) Ma si osservi anzitutto che siccome il termine *eguale* deve già essere definito in sè stesso *logicamente,* così non occorre più che ce ne occupiamo nella teoria dei numeri;

B) Quanto alla *somma,* poichè a tutti son famigliari certe proprietà fondamentali della somma (4), il cui concetto non si può affatto concepire senza far uso dell' idea di numero; di più, siccome è noto che per noi definire il termine *somma* come il termine *numero* significa determinare le proprietà più semplici ad essi inerenti, così basta un semplicissimo esame delle proprietà relative a questi due termini per farci concludere che il termine: " *successivo* ", sinonimo di " *che vien dopo* ", si può sostituire al termine *somma* nel caso di sommare con *uno.* In tal modo è possibile esprimere con i due soli segni: *1, suc.,* tutti gli individui della classe N, indipendentemente dalle difficoltà materiali che si presentano in tale rappresentazione. Infatti è solo per evitare tali difficoltà che per

Digitized by Google

definizione *poniamo:* 2 = suc. 1; 3 = suc. 2; 4 = suc. 3; ma i termini 2, 3, 4 non sono necessarî.

3. I termini: *N*, 1, suc. rappresentano quindi idee primitive, idee semplici, che qualunque uomo possiede, e che noi definiamo *in sè stessi* ammettendo che per essi siano vere certe proprietà *primitive* dalle quali si possono dedurre logicamente tutte le altre. In conclusione, con successive riduzioni siam giunti a conservare queste tre idee oltre cui un'ulteriore riduzione non ci sembra possibile:

1° Numero;
2° Uno;
3° Successione.

Queste tre idee possono tuttavia assumere anche la disposizione seguente:

I. { Numero (*Classe*), Uno (*Individuo*);
II. Successione.

§ 2.

Le idee primitive della Geometria.

1. Applicando alla teoria geometrica gli stessi criterî già adoperati circa le teorie della Grammatica, della Logica naturale, della Logica riflessa e dell'Aritmetica, noi possiamo anche qui introdurre una grande semplificazione nella nostra ricerca:

1° distinguendo le idee dalle proposizioni;
2° distinguendo le idee primitive dalle idee derivate.

Digitized by Google

Riguardo ai quali còmpiti tenendo conto dei ragguardevolissimi studî del Pasch (1), del Peano (2), e del Pieri (3), crediamo ancora opportuno di ricapitolare, per comodità dei lettori non specialisti in questo genere di ricerche, i fecondi progressi compiuti nella riduzione dei varî concetti geometrici fondamentali. Una delle più importanti riduzioni analitiche fu compiuta, nel 1882, dal Pasch che, nel suo importante lavoro, giunse a sviluppare la Geometria di Posizione (o Projettiva) assumendo tre soli concetti primitivi, cioè:

1° Punto;
2° Segmento rettilineo;
3° Porzione finita di piano.

" Ma il terzo di questi concetti — osservò acutamente il Peano — si può ridurre ai precedenti assumendo per definizione del piano, o d'una sua parte, una delle ben note sue generazioni; sicchè ammessi i due soli concetti di *punto* e *segmento rettilineo* si possono definire tutti gli altri enti e sviluppare tutta la Geometria di posizione " (4).

Ora, aggiungendo a questi concetti della Geometria projettiva il concetto di congruenza, o di sovrapposizione o trasporto o *moto* d'una figura (trasformazione

---

(1) M. Pasch, *Vorlesungen ueber neuere Geometrie.* Leipzig, Teubner, 1882.

(2) G. Peano, *Principî di Geometria logicamente esposti.* Torino, F. Bocca, 1889, e *Sui fondamenti della Geometria,* « R. di M. », t. IV, 1894, Torino.

(3) M. Pieri, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo.* Memoria della « R. Acc. delle Scienze di Torino », Serie II, Tom. XLIX, 1899.

(4) Cfr. « R. di M. », vol. IV, 1894: *Sui fondamenti della Geometria.*

Digitized by Google

di punti in punti) che comparisce nella Geometria metrica, risultava che i concetti primitivi della Geometria generale erano quattro secondo il Pasch e tre secondo il Peano (*Punto, Segmento, Moto*).

2. Così erano le cose quando il Pieri, lavorando sopra i dati del Pasch e del Peano, giunse ad introdurre un'altra radicale semplificazione, portando a due i concetti primitivi della Geometria elementare, nella sua eccellente " monografia del punto e del moto ".

" Il sistema di Geometria, che è per delinearsi in questo saggio — egli scrive — procede e si svolge di pari passo con due concetti non tolti a nessun'altra scienza deduttiva o intorno ai quali si finge di nulla saper da principio: son questi il *punto* ed il *moto*. Tutte le altre nozioni a cui dobbiam fare appello spettano alla Logica pura (e come tali si trovan distinte e classificate in forma assolutamente deduttiva nei moderni studî sulla Logica algebrica); oppure ripeton l'origine da quelle due sole idee prime, combinate fra loro, e con le categorie della Logica per via di definizioni nominali " (pag. 178, op. cit.).

Il moto è qui ben inteso come *rappresentazione dei punti in punti* e lungi da ogni qualunque significato meccanico. Tuttavia è della massima importanza notare che l'A. si decise a scegliere il concetto di *moto* solo per motivi didattici, pur " non rimanendogli alcun dubbio circa la possibilità di comporre tutta quanta la Geometria elementare con queste due sole materie prime:

1° Il punto;

2° Una certa *relazione* fra tre punti a, b, c, che si può rappresentare con le frasi " c dista da a quanto b ", ovvero " c appartiene alla sfera descritta da b, centro a ",

Digitized by Google

" la coppia (a, c) è congruente alla coppia (a, b) „ ecc. e rappresentar, se ci piace, per mezzo di un simbolo " $c \in b_a$ „, senz'altro „ (pag. 176, op. cit.).

Ognun vede chiaramente di quanta importanza siano tanto l'accennata riduzione delle idee, quanto quest'intima tendenza a rimpicciolire la sfera del moto e forse a proscriverlo del tutto dai fondamenti della Geometria elementare.

3. Ciò premesso, è appena necessario avvertire che:

A) Il *punto* geometrico è pur sempre dal Pieri considerato sotto i due punti di vista ben noti, cioè:

1° come *classe* (di punti);

2° come *individuo* (Cfr. *Nuovo modo di svolgere*, pag. 5).

B) Il *moto* geometrico è precisamente considerato come *relazione*, cioè come " trasformazione di punti in punti „, " congruenza „, " trasporto „, " sovrapposizione „, " rappresentazione di punti in punti „, " una certa relazione fra tre punti „, " un gruppo transitivo di trasformazioni „, per concludere — non sembrando più possibile alcuna riduzione ulteriore — che le idee primitive della Geometria sono riducibili al sistema seguente:

I. Punto { *(Classe)* / *(Individuo)*

II. Moto *(Relazione)*.

Digitized by Google

CAPITOLO TERZO

Le idee primitive della Fisica in generale e in particolare della Fisica matematica e della Meccanica razionale.

---

1. Quella parte della Fisica che si occupa dell'osservazione dei fenomeni, della misura delle grandezze che vi compaiono, delle leggi che li governano e della riprova sperimentale dei risultati ottenuti teoricamente, costituisce un ramo speciale a cui si suol dare il nome di Fisica sperimentale (1).

Quella parte della Fisica che ha per oggetto lo studio teorico dei modelli, cioè la deduzione e la coordinazione di tutte le leggi che li governano, avendo preso uno sviluppo grandissimo, specialmente in questo ultimo secolo, forma quasi una scienza a parte che si chiama Fisica matematica (2).

La Fisica matematica si suddivide alla sua volta in molte teorie particolari (meccanica, termica, ottica,

---

(1) Fabio Invrea, *Elementi di Fisica*. Torino, Unione Tipografico-Editr., 1900, p. 10.

(2) *Idem*, pag. 9.

Digitized by Google

elettro-magnetica, ecc.) le quali — per quanto siano costruite indipendentemente l'una dall'altra — tuttavia finiscono in ultima analisi per condurre ad un sistema comune di equazioni (equazioni di Lagrange in senso generalissimo) che hanno un significato ben più largo e più profondo che le teorie medesime da cui sono ricavate. Questa è la ragione per cui le singole teorie della Fisica matematica possono ancora venire raccolte tutte quante in sintesi suprema dalla Meccanica razionale; lo studio della quale presuppone la conoscenza dell'aritmetica e della geometria e di tutte quelle altre scienze che si riattaccano a queste, come la trigonometria, l'algebra, la geometria analitica, il calcolo infinitesimale e via discorrendo.

La Meccanica è invero la parte più perfezionata della Fisica, e la sua perfezione consiste appunto nell'aver bisogno di poche idee e di pochi postulati (assunti dall'esperienza) per dedurne un'infinità di teoremi sui casi anche più complessi di movimento, teoremi la cui esattezza è stata sempre confermata dall'esperienza e sopratutto dall'accordo ammirabile fra i movimenti degli astri, quali si sono studiati e previsti nella meccanica celeste (1).

2. Ciò posto — senza entrare nel campo che richiede la conoscenza delle teorie più alte e più difficili dell'analisi matematica — rivolgiamo la nostra attenzione a quel gruppo d'idee primitive di cui si fa uso implicito ed esplicito in questa scienza, coll'intento d'interpretarle da un punto di vista ancora superiore, quando

(1) Fabio Invrea, *Elementi di Fisica*. Torino, Unione Tipografico-Editr., 1900, p. 13.

Digitized by Google

ci venga fatto di poterle ridurre ed ordinare logicamente ad una formula più semplice e più rigorosa (1).

E poichè la maniera più naturale e più sicura per giungere al nostro intento è quella di seguire attentamente la storia dei varî metodi di esposizione della Meccanica finora impiegati e di esaminarne il valore ed i risultati, ricordiamo brevemente i più importanti

(1) A rigore di logica, per procedere all'analisi delle pure idee primitive della Fisica, non dovremmo qui prendere in esame le idee primitive di cui fa uso così la Fisica matematica come la Meccanica razionale, scienze miste e derivate rispetto alla Fisica pura; nello stesso modo che — dovendo procedere all'analisi delle idee primitive così della Logica come della Matematica — non stimammo opportuno di fermarci ad analizzare le idee primitive di cui fa uso la Logica matematica, scienza mista e derivata rispetto a quelle. In verità Logica matematica, Fisica matematica e Meccanica razionale dovrebbero essere tutte quante esaminate ed apprezzate solo più tardi e come ulteriori applicazioni delle idee primitive della Logica pura, della Matematica pura e della Fisica pura. E tale è appunto il piano generale del presente lavoro, in cui la Logica matematica ad esempio sarà analizzata e giudicata a suo posto (Cfr. Cap. V, § 2) ed a fianco suo saranno rassegnate tutte le altre applicazioni scientifiche costruite analogamente (Cfr. Cap. V, § 1). Ma siccome in primo luogo la Fisica pura non ha finora intrapreso il lavoro della ricerca, dell'analisi e della riduzione delle sue idee primitive, come è avvenuto invece più o meno rigorosamente nella Logica pura e nella Matematica pura; in secondo luogo, siccome invece questo lavoro fu fatto — e nel modo che vedremo — dalla Fisica matematica e specialmente dalla Meccanica razionale, e, per comune intesa, si accettano dalla Fisica pura i risultati analitici ottenuti dalla Meccanica razionale, così ci vediamo costretti a fermarci sopratutto all'analisi di questa scienza mista, per servire agli scopi generali dell'analisi della Fisica pura. Questa però è una *libertà* che non pregiudica i nostri ragionamenti.

Digitized by Google

metodi espositivi riferiti e criticati dal Hertz (1), il quale nell'accingersi a rifare l'ammirabile edifizio della Meccanica razionale, ha svolto rigorosamente la nostra questione. I metodi esposti sono tre.

Il primo è il metodo classico (2) che segue nell'insegnare la scienza l'ordine in cui essa si è andata formando attraverso i secoli. Qui i concetti fondamentali che si assumono come dati sono quattro:

Tempo, Spazio, Massa e Forza.

Un secondo metodo possibile (3) — secondo Hertz — benchè non sia stato svolto (4), consisterebbe nell'introdurre fin da principio, come quarto, in luogo del concetto di forza il concetto di energia. Qui bisognerebbe dare come un fatto sperimentale l'esistenza di due specie di energia e la sua indistruttibilità. Le idee fondamentali sarebbero quindi le seguenti:

Tempo, Spazio, Massa, Energia.

Un terzo metodo — che è quello che Hertz svolge nella sua opera — non introduce da principio che tre soli concetti:

Tempo, Spazio e Massa.

3. Ritenendo inconfutabili le critiche mosse ai due primi metodi espositivi rivolgiamo la nostra analisi a quest'ultimo in cui si determina la vera e nuova fase del pensiero del grandissimo fisico e matematico.

---

(1) H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt.* Leipzig, I. A. Barth, 1894.

(2) Op. cit., pag. 5.

(3) Op. cit., pag. 16.

(4) La cosa era vera quando lo Hertz scriveva; più tardi il metodo di cui si tratta trovò uno svolgimento completo nell'opera di G. Helm: *Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung.* Leipzig, Veit & Comp., 1898.

Digitized by Google

E di capitale importanza il rilevare che ai tre primi concetti dati: Tempo, Spazio, Massa, l'Hertz non tarda ad aggiungerne un quarto: il Moto, il quale unitamente poi alla Massa diventa capace di spiegare ciò che si chiama di solito coi nomi di Forza e di Energia e non è altro per Hertz che un' azione di masse e moti (1) secondo l'ipotesi fondamentale del moto nascosto che egli introduce genialmente nella sua teoria. Poichè è troppo importante conoscere la maniera di eliminare definitivamente i due concetti di forza e di energia dal gruppo dei concetti primitivi della meccanica razionale, riportiamo il brano relativo del Hertz nella traduzione testuale che ne ha dato il Garbasso (2) per essere sicuri d'interpretare fedelmente il pensiero del maestro:

" Se ci proponessimo di comprendere i moti dei corpi che ne circondano o di ridurli a regole semplici e chiare e se in questo tentativo volessimo tener conto solamente di ciò che cade sotto i sensi, la nostra fatica, almeno in generale, riuscirebbe a vuoto.

" Noi ci dovremmo ben tosto convincere che il complesso di ciò che possiamo vedere e toccare non forma punto un universo regolare, un universo nel quale da condizioni uguali scaturiscono sempre le stesse conseguenze. Nè dovremmo conchiudere che vi sono nel mondo più cose di quelle che sono immediatamente osservabili coi sensi.

" Volendo formarci dell' universo una rappresentazione completa e chiusa in sè e regolare, ci è giuocoforza dietro le cose che vediamo supporne altre invisibili,

(1) Op. cit., pag. 30.

(2) A. Garbasso, « Nuovo Cimento », Serie IV, Vol. I, Fascicolo di gennaio, 1895, pag. 10 e seg.

Digitized by Google

dobbiamo dietro le barriere che il senso c'impone, ricercare ancora degli *enti nascosti*.

" Queste influenze nascoste ci si sono presentate nelle due prime esposizioni della Meccanica di cui abbiamo discorso; là erano intese come cose di una natura affatto particolare, per rappresentare la loro parte nell'universo s'erano creati i concetti di forza e di energia.

" Ma questo modo di procedere non è il solo possibile, un'altra via ci si offre.

" Si può ben ammettere che qualche cosa di nascosto per noi ci sia, ma si può negare che questo qualche cosa appartenga ad una categoria particolare.

" È sempre libero a noi di supporre che quel substrato ignoto non sia a sua volta che massa e movimento; massa e movimento che differiscono dagli osservabili non in sè, ma solo per rispetto ai mezzi di cui ci serviamo per le nostre osservazioni.

" Questo modo di considerare le cose è appunto la ipotesi che noi vogliamo introdurre.

" Noi supporremo cioè che, oltre alle masse sensibili, ne esistono nell'universo altre, rette dalle medesime leggi in modo tale che il tutto guadagni in regolarità e in comprensibilità; vogliamo anzi supporre che la cosa si verifichi affatto in generale, che non vi sia dei fenomeni altra causa, da questa in fuori. Ciò che si chiama di solito coi nomi di forza e di energia non sarà per noi altro che un'azione di masse e di moti, solo ammetteremo che non sempre queste masse e questi moti siano di natura tale che possano cadere sotto la percezione immediata dei sensi „.

Ognuno scorgerà chiaramente l'altissima importanza di questa maniera di considerare i fatti, donde noi ricaveremo molte conseguenze teoriche e pratiche nel modo che vedremo più tardi. Ma noi dobbiamo per

Digitized by Google

ora meditare più a lungo sui quattro concetti che restano, in ultima analisi, proposti come primitivi:

Tempo, Spazio, Massa, Moto.

Non è possibile una riduzione maggiore?

4. Malgrado il rispetto dovuto alla grande autorità di Hertz notiamo anzitutto che il concetto di Massa non può rigorosamente essere considerato come primitivo e quindi indefinibile, per la semplice ragione ch'esso viene introdotto dall'autore, nel primo libro, appunto per mezzo d'una definizione, in cui non si fa altro che attribuire per convenzione il nome di Massa ad un gruppo di concetti aventi già significato ben noto.

La Massa infatti viene dal Hertz definita nel modo seguente:

" Dicesi particella (di massa) un segno (*Merkmal* o caratteristica) che serve per far corrispondere ad un punto dato nello spazio in un determinato istante, un altro punto perfettamente determinato in un istante qualunque " (1). Quindi aggiunge: " Dicesi posizione di una particella il punto che è caratterizzato da questa particella " (2).

Da queste citazioni appare che nella stessa mente di Hertz la Massa non è già altro che una caratteristica, un segno — *il segno di un punto* determinato nello spazio e nel tempo — giacchè per definire la Massa egli ricorre ai termini più noti di Spazio e di Tempo, cioè di punto e d'istante. Il segno d'un punto o d'un istante è poi niente altro che l'affermazione o posizione logica di esso: affermazione o posizione che

(1) Op. cit., pag. 54.
(2) Op. cit., pag. 54.

Digitized by Google

è l'ente logico primitivo implicato in ogni atto mentale, come fu detto a suo tempo.

Il concetto di Massa non è dunque primitivo ma derivato, essendo risolvibile nei concetti di Spazio e di Tempo, e non potendosi definire senza ricorrere agli enti indefinibili già riferiti. È noto che alla domanda: " Un dato ente si può definire? „ si può solo rispondere quando essa venga enunciata sotto la forma seguente: " Dati gli enti a, b si può definire l'ente x? „ in altri termini quando si sia detto di quali enti noi ci possiamo servire.

Da un certo punto di vista la Massa si può quindi definire in modo un po' oscuro, ma perfettamente rigoroso ed accettabile: *lo spazio di un tempo.*

Ciò posto si comprende agevolmente che l'introduzione del concetto di Massa nella teoria della Meccanica razionale si deve ad una pura convenzione o meglio ancora ad una pura comodità di forme, trascurando la quale si andrebbe incontro a gravi ostacoli di esposizione. Ma se i vantaggi espositivi e pratici che reca seco quest'introduzione servono a mostrarci l'opportunità e la convenienza, sovratutto didattica, di continuare nella via finora battuta, conservando — almeno per ora — quell'ente che offre una propria ed innegabile comodità, essi non valgono però a menomare la possibilità d'un'ulteriore riduzione logica dei quattro concetti meccanici fondamentali proposti.

In conclusione — se noi consideriamo lo Spazio come una classe o sistema di punti o di enti — nulla si perde assolutamente considerando anche la Massa come un punto o individuo o ente particolare di questa classe o sistema medesimo. Anzi — colla riunione della Massa e dello Spazio in un concetto solo, per quanto

Digitized by Google

sempre considerato dai noti due punti di vista — il tutto guadagna in precisione ed in comprensibilità.

5. Passiamo ora a studiare la relazione logica che intercede fra Tempo e Moto.

Il Moto è definito dal Hertz nel modo seguente:

" Il passaggio d'un sistema di punti materiali da una posizione iniziale ad una posizione finale, considerato nel tempo e nel modo in cui succede, si chiama un moto del sistema dalla prima alla seconda posizione „ (1).

Per comprendere bene questa definizione in cui si fa uso — oltre ai termini già noti (Spazio e Tempo) — dei termini nuovi Passaggio e Modo fa d'uopo ritenere, in primo luogo, che, ciò che qui si chiama " *modo* in cui succede il passaggio del sistema di punti da una posizione all'altra „ è poi niente altro che la trajettoria percorsa dal sistema in moto. Quest'avvertenza è suggerita appunto dalle proposizioni seguenti:

Un sistema si può trasportare da una prima ad una seconda posizione, in generale, in un'infinità di modi. Si chiama *trajettoria* seguita dal sistema il complesso delle posizioni che esso occupa nel suo moto (pag. 83).

Elemento d'una trajettoria è una porzione della trajettoria limitata da due posizioni infinitamente vicine del sistema. Un elemento di trajettoria è in realtà uno spostamento (infinitamente corto); come tale ha una lunghezza ed una direzione (pag. 83).

Ora è chiaro che se la trajettoria si può definire il complesso delle posizioni di un sistema in moto — a parte il moto — essa non è altro a sua volta che

(1) Op. cit., pag. 143.

Digitized by Google

il nome attribuito per convenzione ad un gruppo determinato di enti già noti. Quindi — perchè complesso, posizione, sistema, altro non sono che espressioni diverse dello stesso concetto (Spazio) — la presenza del termine *modo* nella definizione del Moto non aggiunge alcun ente meccanico nuovo.

In secondo luogo, per quanto riguarda il Moto si avverta che ciò che Hertz chiama qui: " Passaggio di un sistema da una posizione iniziale ad una posizione finale „ e altrove più brevemente " spostamento di un sistema „ (pag. 62) non può essere affatto inteso senza ricorrere al concetto primitivo della Successione (Tempo).

In verità il concetto ch'egli si fa del Moto meccanico è perfettamente analogo a quello che compare in Geometria a proposito delle figure eguali e sovrapponibili o, come si dice abitualmente, congruenti; e quindi al concetto della sovrapposizione o congruenza o trasporto o moto d'una figura.

Infatti è noto che in Geometria, invece di parlare di figure eguali, si può parlare di Moto; il Moto m è allora la corrispondenza per cui dato un punto a della prima figura, risulta determinato l'omologo ma della seconda (1). Ora — se è vero ciò che abbiamo detto nel capitolo II di quest'opera, a proposito delle idee primitive della Geometria, che l'analisi del concetto di Moto considerato come trasformazione di punti in punti, rappresentazione di punti in punti, successione di punti a punti, ci conduce inevitabilmente al concetto analogo di Successione — ne segue per conseguenza che, tenendo conto di queste osservazioni, il concetto

(1) Peano, *Sui fondamenti della Geometria.* « Rivista di Matematica », 1894, vol. IV, pag. 76.

Digitized by Google

di Moto, definito da Hertz come lo spostamento di un sistema o passaggio da posizione a posizione, non si rivela affatto distinto da ciò che s'intende abitualmente per " spostamento d'una massa (sistema, punto, spazio) nel tempo; passaggio da posizione a posizione, da punto a punto; cambiamento di posizione; successione di punto a punto „ e via dicendo.

Il concetto di Moto non è dunque primitivo e indefinibile, essendo anzi risolvibile nei concetti di Tempo e di Spazio dato che Tempo e Successione abbiano un significato unico, com'è giusto. Da un certo punto di vista il Moto si può quindi definire in modo un po' oscuro, ma perfettamente rigoroso ed accettabile: il tempo materiale o concreto d'uno spazio.

6. Ciò posto, si comprende facilmente che i due concetti di Tempo e Moto possono fondersi insieme in un concetto solo, raggiungendo il doppio scopo del rigore e della semplicità teorica; non preoccupandoci per ora dei vantaggi notevoli che possono derivare dal tenerli distinti nell'esposizione didattica.

7. Concludiamo. Se i quattro concetti meccanici surriferiti: Tempo, Spazio, Massa, Moto, si lasciano accoppiare e fondere insieme a due a due così: Tempo e Moto, Spazio e Massa, l'esame dei concetti fondamentali della Meccanica razionale acquista una notevole semplicità. Noi possiamo assumere ormai come primitive due sole categorie distinte di concetti:

1° Spazio o Massa;

2° Tempo o Moto.

Per mezzo di queste idee primitive noi possiamo dare la definizione di tutte le altre idee che devono dirsi derivate rispetto alle prime; inoltre sopra queste basi

Digitized by Google

possiamo costruire le varie specie di proposizioni così primitive come derivate o deduttibili dalle prime, con puri processi logici, senza oltre ricorrere all'intuizione. È vero che qualora si trattasse di scegliere tra le due coppie equivalenti:

A) Spazio e Tempo,
B) Massa e Moto,

la distinzione delle idee in primitive e derivate sarebbe assai arbitraria, perchè se per mezzo della prima coppia si definisce la seconda e per mezzo della seconda si definisce la prima, si potrà sempre prendere — come primitiva — così l'una come l'altra a piacimento. Ma una volta riconosciuto che le due coppie di concetti meccanici e primitivi sono perfettamente equivalenti e sostituibili, non rimane in sostanza indifferente la scelta?

È in parte per questa ragione, ma sopratutto perchè noi non abbiamo — per ora — alcuna necessità di scegliere tra i due gruppi proposti che ci limitiamo a dichiarare — concludendo — che una qualunque delle due coppie di concetti seguenti:

A) { Massa, Moto;
B) { Spazio, Tempo;

la prima delle quali (Massa e Moto) per il suo aspetto più materiale è da preferirsi in Fisica matematica; mentre la seconda (Spazio e Tempo) nel suo aspetto più astratto è da preferirsi in Meccanica razionale, può essere assunta come espressione dei dati primitivi della considerazione interiore *(die innere Anschauung)* sufficienti alla trattazione di tutta quanta la Fisica.

Tuttavia non vogliamo tralasciare di aggiungere che, per quante ragioni si possano escogitare a favore della

Digitized by Google

conservazione dei quattro concetti meccanici riferiti, a stretto rigore di logica, due di essi riescono inutili, anzi imbarazzanti.

8. Ma prima di porre termine a questa ricerca vogliamo aggiungere un'altra prova diretta, dopo la quale speriamo che i nostri lettori, i quali avranno seguito attentamente la nostra analisi dei concetti primitivi della Meccanica razionale, troveranno la semplificazione, da noi proposta, del tutto convincente.

Abbiamo compiuto finora un ufficio logico discensivo, nel quale la mente, dall'insieme delle idee proprie alle determinate teorie fisiche, confusamente vedute, scese a distinguerne le poche idee veramente primitive e fondamentali. Ma le varie teorie fisiche — pur partendo da un gruppo d'idee, considerate per ipotesi come primitive, assai maggiore del nostro — non hanno tardato a compiere l'altro ufficio logico, cioè l'ascensivo, nel quale la mente risale alla chiara e distinta contemplazione dell'unità e totalità delle idee inerenti alla Scienza Fisica in generale.

Tale è appunto il duplice processo della mente che essa, senza tregua, discende dall'unità confusa dell'oggetto e, senza tregua, fa ritorno all'unità distinta del medesimo, sia pur qualsivoglia l'oggetto che cade sotto la nostra apprensiva.

Ora se noi — esaminando alla sua volta quest'armonica unità che fu ricomposta precisamente dalla Meccanica razionale sopra la base delle singole teorie della Fisica matematica (equazioni di Lagrange in senso generalissimo) — riusciremo altresì a dimostrare che i molteplici elementi o termini costitutivi di essa si riducono, in ultima analisi, a quegli stessi termini primitivi che abbiamo trovato alla fine della nostra prima

Digitized by Google

indagine discensiva, avendo così fornito le due maggiori serie di prove, che si possono richiedere metodicamente, potremo ritenere d'aver appoggiato, alle più solide e convincenti ragioni, la nostra riduzione.

9. Procuriamo quindi di esporre qui sommariamente — ma con la maggiore chiarezza che ne sarà possibile, trattandosi di una questione che è forse la più elevata di tutta quanta la Meccanica razionale — in che modo si giunga a stabilire le equazioni fondamentali di Lagrange.

Poscia cercheremo di trarne un'interpretazione conveniente al proposito nostro.

Il punto di partenza è il seguente: un sistema naturale qualunque (corpo o complesso di corpi) ha di solito (cioè se non è in quiete assoluta) la capacità di compiere un certo lavoro. Esprimiamo lo stesso concetto in altre parole, dicendo che: ogni sistema possiede una data quantità di energia. Ma questa energia il sistema la può avere per due ragioni diverse: o perchè *è ciò che è*, o perchè *diventa come diventa*. Si parla nel primo caso di energia *potenziale*, nel secondo di energia *cinetica*.

Ciò posto, si osserverà che la posizione (nel senso più largo), cioè lo stato attuale di un sistema, si può sempre determinare, se si conosce il valore attuale di un certo numero di grandezze, le quali si chiamano *variabili* e *coordinate*.

Venendo ora alla definizione dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è chiaro che la prima deve essere conosciuta, se si conoscono le coordinate, cioè ciò che le coordinate sono: perchè per ipotesi le coordinate bastano a determinare la condizione attuale del sistema e l'energia potenziale dipende appunto da codesta condizione.

Digitized by Google

Quanto all'energia cinetica è chiaro che essa non sarà conosciuta che quando si saprà come le coordinate variano nell'istante attuale, vale a dire ciò che esse diventano. Modificando una coordinata si altera la condizione del sistema e la sua energia; la cosa esige dunque in generale un certo lavoro, il quale va in parte ad aumentare l'energia potenziale, in parte ad aumentare l'energia cinetica.

Le equazioni di Lagrange esprimono appunto le leggi di questo processo. Indicano cioè in che modo il lavoro compiuto per modificare una coordinata si ripartisca fra le due forme di energia. In ultima analisi, siccome possiamo dire di aver stabilito la teoria di una serie di fatti naturali se sappiamo scrivere le equazioni di Lagrange, nel caso proposto, e queste equazioni coincidono con le leggi sperimentali; così — in tutti i casi — basta dunque trovare certe due funzioni delle coordinate che prese come energia potenziale ed energia cinetica, e sostituite nelle formule generali, riproducano le leggi trovate con l'esperienza.

Giova notare finalmente che anche quando si siano analiticamente costruite queste due funzioni soddisfacenti a tutte le condizioni imposte, cioè anche se siano date l'energia cinetica e l'energia potenziale, un sistema non è determinato, perchè vi sono sempre infiniti meccanismi che hanno la stessa energia potenziale e cinetica.

Quindi segue che se esiste un modello per un determinato fenomeno, ne esistono senz'altro infiniti che rendono conto egualmente bene di tutte le particolarità osservate dall'esperienza.

10. Da quest'esposizione compendiosissima, ma sufficiente, a parer nostro, a far comprendere adeguata-

Digitized by Google

mente la formazione logica delle equazioni di Lagrange, possiamo raccogliere la conclusione seguente:

Dei termini che si usano nelle equazioni di Lagrange:

1° alcuni servono ad indicare il sistema naturale di cui si tratta (corpo o complesso di corpi);

2° altri servono ad indicare in che modo il lavoro compiuto per modificare una coordinata si ripartisca fra le due forme del sistema dato, vale a dire ad esprimere certe due funzioni che sono le due parti potenziale e cinetica dell'energia medesima.

Insomma i termini Lagrangiani si riducono ai seguenti:

1° Termini del Sistema naturale,

2° Termini dell'Energia potenziale e cinetica.

Il lettore — ricordando a questo punto le due coppie di termini primitivi: Massa-Moto e Spazio-Tempo, da noi incontrate a termini dell'analisi della Fisica matematica e della Meccanica razionale — potrà pensare, a tutta prima, che fra queste coppie e la coppia di Lagrange interceda una ben notevole differenza. Vale dunque la pena di studiare attentamente se e in quali condizioni il gruppo dei termini di Lagrange:

1° Sistema naturale (corpo o complesso di corpi),

2° Energia potenziale e cinetica,

possa ridursi al tipo delle idee primitive da noi fissato per la Fisica matematica e per la Meccanica razionale:

$$1^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Massa (punto o classe di punti),} \\ \text{Moto;} \end{array} \right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Spazio (punto o classe di punti),} \\ \text{Tempo.} \end{array} \right.$$

Poichè queste due ultime coppie sono perfettamente equivalenti, limitiamoci a considerarne solo una, per esempio la prima.

Digitized by Google

11. È facile vedere primieramente che tra le due espressioni: Sistema naturale (corpo-complesso di corpi) e Massa (punto-classe di punti) non passa sostanziale differenza. Quanto agli altri due termini: Energia potenziale e cinetica e Moto, resta a vedere se e in che modo le due forme dell'energia si ripartiscano per poter entrare nella nostra coppia: Massa e Moto.

A tale scopo ritorniamo alla definizione dell'Energia potenziale e dell'Energia cinetica. Noi sappiamo che la prima serve ad esprimere che un sistema naturale *è ciò che è;* e che la seconda serve ad esprimere che un sistema naturale *diventa come diventa*; inoltre sappiamo che la prima deve essere conosciuta se si conoscono le coordinate, vale a dire ciò che esse sono, e che la seconda deve essere conosciuta quando si sappia come le coordinate variano nell'istante attuale, vale a dire ciò che esse diventano. Ora:

1° se per ipotesi noi adoperiamo il termine *Essere* per esprimere tutto ciò che intendiamo di esprimere, affermando che un sistema dato *è ciò che è,* ossia per indicare l'energia potenziale dipendente dalle coordinate che bastano a determinare la condizione attuale del sistema;

2° se analogamente — per ipotesi — noi adoperiamo il termine *Divenire* per esprimere tutto ciò che intendiamo di esprimere affermando che un sistema dato diventa come diventa, ossia per indicare l'Energia cinetica dipendente dalle coordinate che, diventando ciò che esse diventano, bastano a determinare la condizione del sistema nell'istante attuale;

apparirà chiaro che la formula Essere-Divenire è atta a significare perfettamente le due forme dell'Energia potenziale e cinetica.

Ma basta l'aver ridotto i due fatti a questa disposizione per comprendere — senza difficoltà — che, ciò che

Digitized by Google

può dirsi: Essere di un sistema, cioè la sua Energia potenziale, è poi niente altro che l'espressione determinata della posizione del sistema medesimo, cioè la posizione determinata o lo stato determinato del sistema medesimo.

Ora qual differenza rimane tra ciò che diciamo qui l'Essere di un sistema (o la sua posizione determinata) e ciò che dicemmo prima il Sistema naturale medesimo o la Massa?

Se ogni sistema (Massa) è ciò che è, vale a dire se ogni sistema è l'Essere che è — come non v'ha dubbio — bisogna concludere che il termine " Sistema „ (Massa) non esprime un concetto differente da quello che esprime il termine " Essere „.

Ma se — come fu posto prima — il termine: Essere è equivalente all'espressione: Energia potenziale, non resta che da raccogliere in una voce sola i quattro concetti equivalenti: Sistema, Massa, Essere, Energia potenziale, per sapere in che modo le due forme dell'Energia (potenziale e cinetica) si comportino per poter entrare adeguatamente nella coppia Massa-Moto o in quell'altra Essere-Divenire che è affatto equivalente alla prima, come si vedrà chiarissimamente nel capitolo seguente, quando faremo la sintesi delle idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica.

Non vediamo alcuna difficoltà che c'impedisca di riconoscere che l'Energia cinetica conviene perfettamente con ciò che intendemmo finora per Moto e Divenire. Volendo però considerare più sottilmente le cose, rimane un ostacolo ad identificare questi quattro concetti: Sistema, Massa, Essere, Energia potenziale. Infatti ciò che fu detto prima: Sistema naturale (Massa) è l'indeterminazione della posizione del sistema medesimo, cioè è la pura posizione logica o anche il puro sistema indeterminato. Ciò che si disse poi Essere (Energia potenziale) è invece la determinazione del si-

Digitized by Google

stema medesimo, cioè la posizione effettiva concreta o anche l'essere o lo stato determinato del sistema.

Nel primo caso adunque si tratta dell'Essere indeterminato o dell'Essere puramente logico (Sistema logico indeterminato); nel secondo caso si tratta invece dell'Essere determinato o dell'Essere fisicamente noto e concreto (Sistema fisico determinato). Ma tra l'affermazione o posizione logica d'un sistema indeterminato e l'affermazione o posizione fisica di un sistema determinato, che specie di differenza intercede, a vero dire?

Posto che la semplice affermazione del sistema indeterminato è la semplice posizione logica di esso, e che la successiva affermazione del sistema determinato è la attuale posizione meccanica di esso, possiamo ben ammettere che questa reduplicazione manifesta (prima logica poi meccanica) d'un ente è forse un'esigenza discorsiva ed artistica dello spirito umano, ma si può negare che si debba ritenere come un'indeclinabile esigenza logica della scienza.

Distinguere, come enti di natura affatto particolare, la posizione logica e indeterminata d'un sistema qualunque, e la posizione meccanica e determinata di esso, può essere un artifizio utilissimo dal punto di vista espositivo e specialmente didattico. Ma l'aver appreso questa opportunità basta in pari tempo a mostrarci l'opportunità di cercare altra via. È sempre libero a noi di supporre — volendo rimanere nel puro campo della meccanica — che la posizione indeterminata ed energica d'un sistema sia inutile ed anzi impossibile, almeno per la nostra conoscenza. La scienza invero non ha bisogno di occuparsi di sistemi affatto indeterminati ed indeterminabili, fuorchè per compiere il suo perenne processo di determinazione. Giacchè la determinazione dello stato d'un sistema (energia poten-

Digitized by Google

ziale) dipende solo dal momento storico della nostra conoscenza — per cui all'ignoto succede naturalmente il noto — si può supporre che ogni sistema naturale abbia una posizione determinata o determinabile, cioè una data quantità di Energia potenziale di cui si tratterà solamente di conoscere il valore. Per tal modo, indicando con segni algebrici convenzionali la quantità indeterminata del sistema determinato, cioè dato, potremo eliminare dal novero degli enti meccanici primitivi quel termine che serve ad indicare la posizione e l'Energia potenziale indeterminata del sistema con grande vantaggio del rigore e della semplicità.

12. Il lettore avrà scorto agevolmente che in questa dimostrazione noi abbiamo tentato di adombrare l'ammirabile ipotesi del *moto nascosto* che ha servito ad Hertz per eliminare il concetto di forza.

Questo modo di considerare le cose è veramente utile, e per esso noi possiamo introdurre una notevole semplificazione nel gruppo dei termini che entrano comunemente nelle equazioni di Lagrange:

1° termini del Sistema naturale,

2° termini dell'Energia potenziale e cinetica,

stabilendo che — in generale — ogni sistema naturale possiede o, per dire ancora meglio, è una certa Energia determinata che lo fa essere il sistema che è (Essere o Massa); quindi possiede o, analogamente, è una certa Energia determinata che lo fa diventare il sistema che diventa (Divenire o Moto); quindi, in ultima analisi, tutti i termini adoperati nelle equazioni di Lagrange si riducono al tipo dei termini primitivi da noi fissati tanto per la Fisica matematica: Massa-Moto, quanto per la Meccanica razionale: Spazio-Tempo, come si voleva dimostrare.

Digitized by Google

CAPITOLO QUARTO

Sintesi delle idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica.

1. Ora che abbiamo percorso tutto il campo prefisso raccogliendo sotto i varî capi di ogni scienza (Logica, Matematica e Fisica) le idee primitive trovate analiticamente, gioverà molto il richiamare in forma compendiosa i precipui risultati dello studio fatto, all'intento di vedere se questi rispondano alle affermazioni colle quali esordimmo le nostre ricerche, e se vi arrechino qualche nuova luce.

Poichè, ove infatti, come asserimmo, tutte le svariate forme d'idee primitive tengano fra loro intimi rapporti, non si potrà aver prima conoscenza di una di esse, se eziandio non le avremo tutte comparate e investigate nella loro sintesi. D'altronde codesto sguardo sinottico ci gioverà quale indirizzo e guida ad ulteriori ricerche, e servirà a togliere molte oscurità che tutt'ora appaiono nelle dottrine logiche, matematiche e fisiche.

2. Riportiamo letteralmente le conclusioni delle varie analisi logiche compiute.

Digitized by Google

I. In Logica si è trovato:

1° (Cap. I, § 1°, 11). L'analisi grammaticale mette capo a due termini che si possono considerare come primitivi:

1° nome { classe / individuo

2° verbo.

2° (Cap. III, § 2°, 8). L'analisi dei concetti primitivi della Logica naturale mette capo a due affermazioni che si possono considerare come primitive:

1ª oggetto { classe / individuo

2ª relazione.

3° (Cap. I, § 2°, 12). L'analisi dei concetti primitivi della Logica pura mette capo a queste due idee primitive:

1ª idea { classe / individuo

2ª inclusione (relazione).

II. In Matematica si è trovato:

1° (Cap. II, § 1°, 3). L'analisi dell'Aritmetica pone capo alle due affermazioni seguenti:

1ª numero { classe (numero) / individuo (uno)

2ª successione.

2° (Cap. II, § 2°, 3). Le idee primitive della Geometria sono riducibili al sistema seguente:

1ª punto { classe / individuo

2ª moto (relazione).

Digitized by Google

III. In Fisica si è trovato:

1° (Cap. III, n. 7). Le idee primitive della Fisica matematica sono riducibili alle seguenti:

1ª massa { classe / individuo

2ª moto.

2° (Cap. III, n. 7). Le idee primitive della Meccanica razionale sono riducibili alle seguenti:

1ª spazio { classe / individuo

2ª tempo.

3. Un primo ordine di fatti molto importanti ci porta a riconoscere chiaramente che ogni scienza esaminata si riduce ad una coppia di idee primitive. Un altro ordine di fatti notevolissimi ci viene offerto dai primi termini di ogni coppia. Risulta invero che il primo termine d'ogni coppia è sempre considerato sotto due punti di vista:

1° come classe;

2° come individuo.

Come classe abbiamo: *il* nome, *l'*oggetto, *l'*idea, *il* numero, *il* punto, *la* massa, *lo* spazio.

Come individuo abbiamo: *un* nome, *un* oggetto, *un'*idea, *un* numero, *un* punto, *una* massa, *uno* spazio.

Noi saremo dunque autorizzati a sopprimere le notazioni: classe e individuo, quando si tratterà di compilare una tavola sinottica delle varie idee primitive, perchè tale distinzione è comune a tutti i primi termini di ogni coppia.

4. Analogamente riportando gli schiarimenti ag-

Digitized by Google

giunti al secondo termine di ogni coppia troviamo in tutti i casi un'analogia sorprendente. Eccone la prova:

1° Il concetto di *verbo* grammaticale è sinonimo di inclusione, processo discorsivo, affermazione di riferimento, parola del tempo, ecc. (cfr. cap. I, n. 4-11);

2° Il concetto di *relazione* logica è sinonimo di transizione, processo inclusivo, funzione copulativa, affermazione di riferimento, ecc. (cfr. cap. I, n. 2-5);

3° Il concetto d'*inclusione* logica è sinonimo di moto ideale da individuo a classe, contenuto-contenente, convenienza, congruenza, moto logico, trasporto da..... a..... ecc. (cfr. cap. I, n. 6-9);

4° Il concetto di *successione* aritmetica è sinonimo di venir dopo, processo, passaggio da... a... ecc. (cfr. cap. II, § 1, n. 2);

5° Il concetto di *moto* geometrico è sinonimo di relazione di punti a punti, trasformazione di punti in punti, rappresentazione di punti in punti, trasporto da... a..., sovrapposizione, eguaglianza, congruenza, ecc. (cfr. cap. II, § 2, n. 1-3);

6° Il concetto di *moto* fisico è sinonimo di passaggio da... a..., cambiamento di posizione, spostamento, successione, processo, transizione, affermazione di riferimento, ecc. (cfr. cap. III, n. 5-7);

7° Il concetto di *tempo* meccanico razionale è sinonimo di successione, rappresentazione di... in..., ecc. (cfr. cap. III, n. 5-7).

5. Basta codesta rapida rivista per far comprendere che le differenze fra i sette termini dati non sono che nominali. L'unica differenza che può forse sembrare assai grave è presentata dai due termini (troppo distanti comunemente nella serie): inclusione e tempo. Ma si noti che questi due termini non fanno altro che indi-

Digitized by Google

care processo di... in..., successione, sovrapposizione di..., moto ideale da... a..., funzione copulativa, discorsiva, sovrapposizione, rappresentazione di... in..., ecc.

Ragione vuole quindi che non si ponga alcuna sostanziale differenza fra inclusione logica e tempo fisico-razionale, analogamente che non si ammetta alcuna sostanziale differenza fra tutte le varie coppie di idee primitive riferite.

La tavola seguente, facendo risaltare meglio la classificazione sistematica delle varie idee primitive, ci permetterà di considerare le cose da un punto di vista veramente elevato e ci porgerà la più eloquente conferma di due grandi e nuovi principii su cui vorremmo richiamare l'attenzione dei pensatori.

Digitized by Google

TAVOLA DELLE IDEE PRIMITIVE

LOGICA			MATEMATICA		FISICA	
Grammatica	Logica naturale	Logica riflessa	Aritmetica	Geometria	Fisica matematica	Meccanica razionale
Nome	**Oggetto**	**Idea**	**Numero**	**Punto**	**Massa**	**Spazio**
Verbo	**Relazione**	**Inclusione**	**Successione**	**Moto**	**Moto**	**Tempo**

Digitized by Google

6. Dopo gli schiarimenti che abbiamo aggiunto circa il significato dei varî termini qui addotti, è logico concludere che, se a tutti i termini della prima categoria (differenti fra loro solo nominalmente) convenisse per esempio il segno x, e se a tutti quelli della seconda (pure differenti fra loro solo nominalmente) convenisse il segno y, colla unica formula xy noi potremmo esprimere comodamente tutte le coppie date.

Due principî derivano da questo fatto:

1° la piena e mutua convertibilità delle varie idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica;

2° la possibilità logica di una spiegazione comune (unificabilità).

È chiaro che questi due principî sono intimamente connessi tra loro. Tuttavia non sarà fuor di proposito il considerarli ciascuno sotto un particolare punto di vista, per aprire un più vasto campo all'esercizio della pura ragione e quindi dedurne alcune applicazioni che ci sembrano piene di utilità.

7. Il primo principio che prenderemo in esame è quello della piena e mutua convertibilità delle varie idee primitive, logiche, matematiche e fisiche. A tale proposito giova subito l'osservare che nell'apprezzamento dei risultati che potranno contribuire al rapido avanzamento di codeste ricerche poche osservazioni potranno produrre un notevole vantaggio, fuori di quella che spingendoci ad un principio fondamentale che ammetta una diretta illazione deduttiva, ci pongono dinanzi classi intere di fatti logici, matematici e fisici, come tanti problemi di cui possediamo pienamente i principî di soluzione e che non richiedono altro se non accuratezza di raziocinio per seguirli fino nelle loro ultime conseguenze.

Digitized by Google

Di tale natura noi crediamo che sia il principio della piena e mutua convertibilità delle idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica, imperocchè da esse derivano varie altre relazioni che somministrano alla mente filosofica un campo sempre più esteso di speculazioni, nello scorrere il quale è quasi impossibile che non s'incontrino altri principî e non appaiano nuove e inaspettate applicazioni che diversamente non avremmo mai avuto l'occasione di fare. In verità cominciamo a servirci di un fatto che aiutò grandemente i progressi delle scienze fisiche e perciò non è improbabile che possa influire a promuovere un progresso corrispondente nelle altre.

In molti casi le relazioni dei fenomeni in due differenti questioni presentano una tale analogia che ci permette, allorchè abbiamo risoluto una di tali questioni, d'impiegare la nostra soluzione anche a quell'altra questione.

Facendo largo uso dell'analogia tra la convertibilità delle energie fisiche considerate in loro stesse, cioè oggettivamente, e la convertibilità delle idee primitive considerate nella teoria della scienza ossia soggettivamente, ecco a quali conclusioni possiamo arrivare. Come — dalla possibilità fisica di provocare simultaneamente i diversi fenomeni meccanici, termici, chimici, elettrici, magnetici, luminosi, facendo passare la corrente elettrica attraverso alla catena di Grove, ad esempio — noi possiamo concludere che essi non sono altro che manifestazioni diverse di una sola energia fisica, la quale si appalesa variamente secondo la costituzione degli strumenti in cui agisce; così — dal fatto che noi possiamo insieme provocare i varî ordini scientifici legandoli intimamente fra loro mediante una catena di formularî logici, matematici e fisici, facendo

Digitized by Google

passare di campo in campo la stessa formula tipica fondamentale (come speriamo di poter dimostrare " anche praticamente „ nel seguito di queste ricerche) — siamo indotti a concludere che essi non sono altro che manifestazioni diverse di una sola virtù ideale che si appalesa variamente secondo la costituzione delle formalità scientifiche in cui agisce. Ancora, come dal fatto della piena e mutua convertibilità di tutte le energie fisiche siamo indotti ad ammettere l'assoluta indifferenza di ciò che si dice l'energia fisica prima, a manifestarsi più tosto sotto l'apparenza di luce che di calore, o più tosto di magnetismo che di movimento meccanico e via dicendo, così dal fatto analogo della piena e mutua convertibilità delle idee primitive siamo indotti ad ammettere l'assoluta indifferenza di ciò, che potrebbe dirsi l'energia ideale prima, a manifestarsi più tosto sotto la formalità scientifica della logica che della matematica, o più tosto della matematica che della fisica e reciprocamente.

8. Per niun modo adunque può ammettersi l'esistenza di tanti tipi scientifici essenzialmente diversi fra di loro, perchè essendo i loro sistemi di idee primitive corrispondenti convertibili perfettamente gli uni negli altri, la loro individuale esistenza scompare del tutto nell'anzidetta serie di prove. Anzi, come vedremo, la connessione di tutti gli ordini scientifici citati è tale che, mentre ogni coppia di idee primitive è rivestita di una formalità inerente al suo dato campo nominale, ciascuna poi di codeste formalità può alla sua volta essere impiegata nella trattazione scientifica dei varî ordini. Perciò sembra probabile che qualsivoglia formalità scientifica, logica, matematica e fisica si potrà estendere ed applicare a qualsivoglia coppia di idee

Digitized by Google

primitive della logica, della matematica e della fisica, come sarà nostra cura di dimostrare a suo tempo.

Per tutto questo apparirà abbastanza dimostrato il principio della piena e mutua convertibilità delle varie idee primitive logiche, matematiche e fisiche.

Di qui siamo condotti logicamente ad ammettere che la contraddizione fra le varie teorie scientifiche derivanti dal ceppo comune delle idee primitive è solo nelle imagini di cui è rivestita la verità. Ogni coppia di idee primitive rivestita di una formalità scientifica data diventa niente altro che un modello che soddisfa a tutte le condizioni imposte.

9. È tempo dunque di riconoscere con tutta franchezza quanta parte d'artificiale e di posticcio si raduni in certi ordini teorici che si ammirano per la loro apparente consistenza ed irreducibilità.

Non di rado si sente dire — ad esempio — che in tutto l'universo noi non vediamo — in ultima analisi — che una materia sottoposta alle leggi universali della matematica, onde ogni problema di fisica si risolve, in fondo in fondo, in un problema di aritmetica o di geometria. Non di rado si sente dire, per contro, che l'universale pedagogia dello spirito è la Logica pure suprema ed unica chiave di volta di tutto l'edifizio conoscitivo e scientifico umano. Spessissimo, parimenti, siamo spinti ad accettare — ammettendo la convertibilità e l'omogeneità delle energie fisiche — siccome fondata in natura l'ipotesi, già indovinata dal Galilei, che tutte queste energie non siano altro, considerate in loro stesse — ossia obiettivamente — fuorchè una particolare manifestazione dei moti, ora fatali ed ora intestini, inerenti alla materia dei corpi.

Ora, ben può dirsi che tutte queste singole afferma-

Digitized by Google

zioni sono vere solo parzialmente — appunto perchè sono tutte vere simultaneamente. Giacchè, in base alle nostre deduzioni, noi dobbiamo introdurre nella formazione delle affermazioni scientifiche, l'unità, la semplicità, l'armonia delle idee logiche, matematiche e fisiche che, oltre ad essere convertibili reciprocamente, sono anche perfettamente unificabili, come noi passeremo fra poco a dimostrare. Però non si tralasci mai di rammentare che, pur facendo larghissimo uso delle analogie fra la convertibilità oggettiva delle energie fisiche e la convertibilità soggettiva delle idee scientifiche, forse anche nel più favorevole dei casi, la similitudine che costituisce quest'analogia non esiste nei fenomeni ideali stessi ma solo tra le relazioni di questi fenomeni. Questa similitudine relativa è, nondimeno, del tutto sufficiente al proposito nostro, giacchè l'analogia che riscontriamo nelle tre scienze riferite è così completa, che in base ad essa noi possiamo asserire logicamente che tutti i risultati derivanti dalle proprietà delle idee primitive di ognuna di esse possono essere immediatamente tradotti, senza pericolo di errore, dal linguaggio proprio di una delle scienze in quello dell'altra.

10. Logicamente parlando, pertanto, noi siamo liberi di far uso — nel corso delle nostre ricerche — in qualunque di queste scienze, della formalità appartenente all'altra, se noi possiamo così concepire più chiaramente la connessione dei nostri ragionamenti.

S'incontrano solo dei limiti di siffatte sostituzioni di formalità a formalità in questo che si possono presentare delle complicazioni che tutti forse rigetteranno a cagione della loro bizzarrìa — e delle altre che tutti preferiranno a cagione della loro semplicità. Ma queste

Digitized by Google

difficoltà non possono avere un gran peso, imperocchè in nessun caso la semplicità o la complessità di una teoria devono essere confuse colla possibilità o l'impossibilità della sua dimostrazione. Ogni legge è semplice o complessa fino a prova contraria.

11. Nella storia della scienza — avverte acutamente il Poincaré — vediamo talora la semplicità nascondersi sotto apparenze complesse, e talora è la semplicità medesima che è apparente e nasconde delle realtà complicatissime. E più avanti aggiunge: Se i nostri mezzi d'investigazione divenissero più penetranti noi scopriremmo il semplice sotto il complesso, poi il complesso sotto il semplice e così di seguito senza giungere mai alla fine.

Noi andiamo per tanto a considerare, nel capitolo seguente, tutte le combinazioni scientifiche che possono nascere dallo scambio reciproco delle varie formalità logiche, matematiche e fisiche e se vedremo che queste teorie novelle continueranno ad insegnarci che vi sono tali e tali altri rapporti fra qualche cosa e qualche altra cosa e che questi rapporti conservano la loro realtà, noi concluderemo, a più forte ragione, che queste teorie miste sono tutte vere.

12. Passiamo ora all'esame del secondo principio stabilito, ossia della possibilità logica d'una spiegazione comune a tutte le idee primitive della logica, della matematica e della fisica.

A niuno sfugga l'importanza di questo principio. In linea generale la scoperta della possibilità logica d'una spiegazione qualunque, comune a un dato ordine di fatti, fu sempre sorgente inesauribile di nuove teorie e nuove applicazioni. Ora, volendo penetrare nel do-

Digitized by Google

minio della metafisica — ciò che non si può evitare assolutamente da chi voglia tentare una qualunque sintesi delle idee primitive della logica, della matematica e della fisica — non s'incontra alcuna difficoltà a trovare una coppia di termini astratti convenienti ai due segni convenzionali x ed y che si potrebbe, per conseguenza, considerare come la coppia fondamentale e suprema capace di esprimere metafisicamente tutte le coppie date.

13. Molte ragioni di preferenza militano, per esempio, a favore della coppia: *Essere* e *Divenire*, quando si faccia corrispondere a tutti i termini della prima categoria il termine *Essere* (o stato che dura), e a tutti quelli della seconda il termine *Divenire* (o azione che si compie), nel senso che lo stato è l'azione che è; l'azione è lo stato che diviene; o in altri termini, ma con più brutta tautologia: l'essere è il divenire che è; il divenire è l'essere che diviene.

Quest'ipotesi logicamente accettabile è anzi così lusinghiera, anche dal punto di vista metafisico, che non sappiamo rinunziare all'impiego di alcune altre nuove ma troppo rapide analogie fra le generalizzazioni supreme della Fisica e della Metafisica, nella speranza di poter ritornare, più a lungo e con maggior corredo di materiali, sopra una ricerca che è tanto più importante quanto meno è conosciuta dai pensatori e quanto più è complicata e sublime almeno per la nostra intelligenza.

Anzitutto si ponga mente a due fatti:

1° Noi abbiamo veduto (Capit. III, n. 1) che le singole teorie della Fisica matematica, le quali sono raccolte tutte quante in sintesi suprema dalla Meccanica razionale — per quanto siano costruite indipen-

Digitized by Google

dentemente l'una dall'altra — tuttavia finiscono, in ultima analisi, per condurre ad un sistema unico e comune di equazioni (equazioni di Lagrange in senso generalissimo) le quali ànno un significato ben più largo e più profondo che le teorie medesime da cui sono ricavate.

2° Esaurite le nostre analisi sui tre grandi campi della Logica, della Matematica e della Fisica, noi siamo altresì condotti ad ammettere la possibilità logica d'una formula unica, comune alle varie coppie di idee primitive riferite; e pure proporremmo in via d'ipotesi la formula metafisica: *Essere — Divenire*, che trovammo già atta ad esprimere egualmente bene i termini primitivi della Fisica. Ora dalla connessione di questi due fatti non emerge forse che vi sono tutte le migliori ragioni per ritenere che quanto è succeduto nella storia della Fisica matematica e specialmente della Meccanica razionale, rispetto alla costruzione delle equazioni fondamentali di Lagrange, può succedere altresì analogamente nel campo supremo della Metafisica?

14. Questo modo di considerare le cose è appunto l'ipotesi che noi vogliamo introdurre.

Noi supponiamo cioè che — posta la base delle idee primitive comuni — si finirà un giorno per arrivare ad un sistema comune di equazioni metafisiche che, esprimendo appunto ciò che v'è d'essenziale e di comune a tutte le teorie logiche, matematiche e fisiche, avranno un significato ancor più largo e più profondo che le teorie stesse da cui si saranno ricavate.

15. Non basta. Fondandoci sul principio della piena e mutua convertibilità delle idee primitive, ed os-

Digitized by Google

servando che in Meccanica razionale l'importanza capitale delle equazioni di Lagrange deriva dal fatto che esse rendono conto in modo ugualmente soddisfacente di tutta la serie dei fatti meccanici, si può ancora ritenere che quel sistema comune di equazioni metafisiche — che noi per adesso non conosciamo, ma di cui possiamo almeno dimostrare la logica possibilità, e che verrà ad integrare tutta la serie delle singole teorie logiche, matematiche e fisiche — sarà poi niente altro che la trasformazione metafisica del sistema delle equazioni di Lagrange, dovendo i varî sistemi, costruiti colle idee primitive equivalenti, riuscire pienamente e reciprocamente convertibili. Come quello che è vero per le singole teorie della Fisica matematica è vero anche per l'intero edifizio della Meccanica razionale, che in certo modo ne è la sintesi suprema, così quello che è vero per la Meccanica razionale è vero anche per l'intero edifizio della Metafisica, che — in certo modo — raccoglie in sè tutte le singole teorie della Logica, della Matematica e della Fisica.

Le equazioni di Lagrange — *mutatis mutandis* — cioè passando di campo in campo ed assumendo a volta a volta la formalità ed il significato particolare alle varie discipline, indicheranno le leggi dei varî processi scientifici e renderanno conto egualmente bene di tutte le particolarità loro inerenti.

Questo concetto è completamente nuovo.

Per esso apparrà sempre più plausibile il supporre che il principio del ragionamento logico e metafisico sia sottoposto alle stesse leggi che regolano il ragionamento matematico e fisico.

Per esso il lettore cesserà di trovarsi in presenza di una formula quasi vuota di materia per la sua astrattissima e relativissima significazione che egli

Digitized by Google

avrebbe forse altrimenti rischiato di prendere per una ombra fuggitiva ed inafferrabile. In verità, non a tutti potrebbe parere sufficiente, per il proposito nostro, che si dimostri la pura possibilità di una spiegazione unica comune ai varî ordini scientifici dati; laddove trasportando positivamente nel campo della Metafisica quel sistema di equazioni, che possiede un significato così reale nel campo della Meccanica, quelle considerazioni che prima potevano parere eleganti, ma vane, assumono anch'esse un significato più convincente e reale.

L'ipotesi quindi dell'applicabilità logica, matematica e metafisica, delle equazioni di Lagrange, logicamente accettabile, aspetta d'essere direttamente verificata col fatto.

E non sarà questo uno fra i meno felici esempi dell'inaspettato aiuto che le scienze — benchè apparentemente remotissime — possono prestarsi fra loro.

16. Tuttavia sentiamo il bisogno di fare una grave avvertenza. Noi abbiamo recato quest'ipotesi dell'applicabilità delle equazioni di Lagrange perchè lo spirito dei nostri lettori — che supponiamo ben addentro ai fenomeni naturali e specialmente a quelli riguardanti le scienze fisiche e matematiche — si famigliarizzi sempre meglio con l'idea fondamentale di questo lavoro. Ma poichè le fatte osservazioni non possono riuscire scevre d'inesattezze — sentendo noi troppo bene quanto studio richiedano ancora queste ricerche, e stimandoci d'altronde ben fortunati di essere nel vero solo con l'idea fondamentale — sarà bene che si lasci da parte, per ora, ogni ricerca intorno alla formula metafisica che potrà parere preferibile o no a seconda della sua maggiore o minore semplicità.

Digitized by Google

A costo di rientrare nell'astrattezza per cui lo svantaggio, di diventare relativamente inaccessibili ai molti, che acquista la teoria, è solo compensato dal vantaggio di rimanere più vicina all'ideale verità, ricordiamoci che tutto ciò che può più importarci, in questo momento, è la possibilità logica della spiegazione comune e che per dimostrare la possibilità di una spiegazione qualunque noi non dobbiamo punto preoccuparci di trovare questa spiegazione medesima e che quindi noi possiamo rimanere — come rimaniamo — indifferenti a qualunque proposta metafisica soddisfacente, non potendo più la nostra scelta essere guidata che da considerazioni in cui la parte di apprezzamento personale è grandissima.

17. Sulle orme di Maxwell ricordiamo infatti che per dimostrare la possibilità di una spiegazione meccanica della teoria elettrica — per esempio — noi non dobbiamo preoccuparci di trovare questa spiegazione medesima, ci è sufficiente di trovare l'espressione di certe due funzioni $U(q_k)$, $T(q'_k, q_k)$ che sono le due parti dell'energia e di formare con queste due funzioni le equazioni di Lagrange e di paragonare, in seguito, queste due equazioni colle leggi sperimentali.

Queste considerazioni ci faranno comprendere che una volta riconosciuto il principio incontestabile della possibilità logica d'una spiegazione comune alle varie coppie d'idee primitive riferite, resta, in sostanza, indifferente così la strada per cui vi si è giunti come le infinite rappresentazioni o gl'infiniti modelli che si possono costruire sopra di esse.

Noi intravediamo la possibilità e la convenienza di metterci — di fronte alla sintesi delle varie idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica

Digitized by Google

— nella stessa posizione che fu già adottata da Maxwell — di fronte alle teorie elettriche e magnetiche, delle quali egli non diede nessuna spiegazione meccanica completa — come viene affermato dal Poincaré, ma si limita a dimostrarne rigorosamente la possibilità, pur dando origine a tutti i vantaggi teorici e pratici che non è il caso ora di riferire.

18. Ritornando, per ultimo, colla memoria sulle cose meditate per iscorgervi il loro vicendevole legame e volendo fare di tutto questo capitolo un brevissimo riassunto, possiamo stabilire:

1° che i varî ordini scientifici, logici, matematici e fisici, versano tutti quanti nel piano d'un simbolico fluire d' idee, di numeri, di punti, di corpi, di sistemi, i quali mediante un processo metodico di posizioni e di proposizioni (che sarà esaminato nella seconda parte di questo volume) vanno componendo i postulati e i sillogismi indispensabili all' ordine loro;

2° che questi varii ordini, benchè costruiti indipendentemente gli uni dagli altri, sono pienamente e reciprocamente convertibili fra loro.

19. Raccogliamo la conclusione suprema.

Riconoscendo che tutta la famiglia degli enti primitivi, logici, matematici e fisici, ha uno stipite solo, è logico dunque stabilire che i varî ordini scientifici riferiti non sono che la realtà mascherata d'un solo processo, che si rivela come la necessità primitiva e determinante della scienza.

Senza dubbio questa considerazione sintetica delle varie idee primitive resta sempre molto astrusa e, con qualche apparenza di verità, si potrebbe altresì obbiettare che essa perde in semplicità tutto ciò che

Digitized by Google

guadagna in unità. Ma noi amiamo riferire a questo proposito le profonde parole, colle quali Sir John Herschel chiudeva il suo celebre *Discorso preliminare sullo studio della Filosofia naturale:*

" Dobbiamo rammentarci che, per quanto l'esperienza c'insegna, ogni passo verso la generalizzazione è stato ad un tempo un passo verso la semplificazione. Egli è soltanto quando andiamo erranti e smarriti nei labirinti delle particolarità, o siamo impegnati in tentativi inutili di aprirci una strada nei sentieri spinosi delle applicazioni, in cui le forze del nostro raziocinio non sono sufficienti, che la natura ci sembra complicata. Tosto che la contempliamo qual'è — ed occupiamo una posizione, dalla quale possiamo dominare collo sguardo, non fosse che una piccola parte del suo disegno, non è mai che non riconosciamo quella sublime semplicità per cui la mente si persuade di essere giunta alla scoperta del vero ".

Digitized by Google

CAPITOLO QUINTO

Applicazioni generali.

§ 1.

Scienze miste o derivate.

1. Passiamo ora a considerare attentamente tutte le combinazioni scientifiche — scienze miste o derivate — che possono nascere dallo scambio reciproco delle varie formalità logiche, matematiche e fisiche.

La prima applicazione scientifica di questo principio nasce dalla riunione della prima formalità (logica) con la seconda (matematica). È la Logica matematica, vale a dire la Logica trattata dal punto di vista della Matematica. Questa disciplina evidentemente mista ha una storia ed un' importanza tale che merita di essere studiata a parte, quasi come scienza indipendente. E noi faremo appunto questo studio nel § 2° di questo capitolo.

È chiaro che alla Logica matematica può accompagnarsi, con pari diritto, un'altra disciplina finora, rigorosamente parlando, intentata: la Matematica logica o razionale, vale a dire la Matematica trattata dal punto di vista della Logica.

Digitized by Google

2. Segue la seconda applicazione scientifica dello stesso principio fondamentale, cioè la combinazione della prima formalità (logica) colla terza (fisica); che potrebbe prendere il nome di Logica fisica.

Ma questa disciplina, che ha teoricamente lo stesso valore della Logica matematica e di tutte le altre applicazioni che si possono fondare sullo stesso principio, è ancora da farsi di sana pianta. Per colmare questa lacuna noi tenteremo appunto di abbozzare un modesto saggio preparatorio che verrà pubblicato fra breve — come semplice applicazione di questi principii teorici generali — col titolo di " *Sopra un modello fisico di alcuni fenomeni logici* " primo saggio di Logica sperimentale. Le considerazioni che aggiungeremo nella seconda parte di questo volume intorno ai rapporti fra l'esperienza in genere, l'esperienza fisica in specie e la teoria, giustificheranno — vogliamo sperarlo, almeno in parte — le nostre ricerche ed anche l'intestazione del prossimo saggio che a prima giunta potrebbe sembrare troppo brutale. È chiaro che alla Logica fisica o sperimentale può accompagnarsi con pari diritto un'altra disciplina finora intentata: la Fisica logica, vale a dire la Fisica trattata dal punto di vista della formalità logica.

3. Segue la terza applicazione scientifica dello stesso principio fondamentale, cioè la combinazione della seconda formalità (matematica) colla terza (fisica), che potrebbe prendere il nome di Matematica fisica o sperimentale.

Ma questa disciplina mista è pure ancora da farsi. È chiaro che a questa disciplina può accompagnarsi con pari diritto la sua inversa, cioè la Fisica matematica, vale a dire la Fisica trattata dal punto di vista matematico. Questa scienza mista ha una storia

Digitized by Google

ed un'importanza tale che essa viene studiata a parte, quasi come scienza indipendente. Per le ragioni che furono addotte nel capitolo III, noi abbiamo anzi fermato la nostra analisi più sopra la Fisica matematica che sulla Fisica pura, propriamente detta. Tuttavia è solo in questo capitolo, delle applicazioni, che questa scienza derivata e mista dovrebbe essere particolarmente esaminata. Ma il lettore capirà che — a questo punto — ogni ulteriore schiarimento su questa scienza derivata riuscirebbe completamente superfluo.

4. Una riflessione molto importante è da farsi a proposito della Meccanica razionale — cioè della Meccanica trattata dal punto di vista razionale o logico. Si noti pertanto che questa scienza che — in certo modo — è la sintesi suprema di tutte le singole teorie della Fisica matematica, differisce dalla Fisica matematica solo pel fatto che in essa intervenendo in gran parte anche la formalità inerente al primo ordine (logica o razionale) si presenta altresì come la sintesi di tutti i tre ordini scientifici analizzati: Logica, Matematica e Fisica.

Per tal modo la Meccanica razionale è, a vero dire, la trattazione simultanea della Matematica e della Fisica, dal punto di vista della Logica. Questo modo di considerare le cose ci lascia comprendere che sarebbe possibile analogamente costruire:

1° un'altra teoria che fosse la trattazione simultanea della Logica e della Fisica dal punto di vista matematico;

2° un'altra teoria che fosse la trattazione simultanea della Logica e della Matematica dal punto di vista della Fisica.

Con quest'avvertenza poniamo termine all'elenco delle

Digitized by Google

applicazioni scientifiche del nostro principio, avendo esaurito logicamente tutte le combinazioni possibili. Nel paragrafo successivo di questo capitolo prenderemo in minuto esame la Logica matematica, per le ragioni che saranno addotte a suo tempo. Della Logica sperimentale ci occuperemo direttamente — come fu detto — nel prossimo saggio. Della Fisica matematica e della Meccanica razionale ci occupammo direttamente nel capitolo III. Di tutte le altre applicazioni scientifiche annoverate basti per ora la semplice affermazione della loro logica possibilità.

5. Ci si consenta tuttavia un'osservazione ed uno schiarimento finale.

Per quanto possa sembrare bizzarra e complicata noi crediamo che questa nuova maniera di considerare la natura e la posizione delle varie scienze mentovate presenti notevoli vantaggi e meriti quindi di venire apprezzata convenientemente dagli studiosi.

Mentre per la continua specializzazione di tutte le scienze, ogni ricerca va via via ramificandosi e quasi allontanandosi in modo indefinito dalle sue prime origini, è ben naturale che si venga sempre meglio a dimostrare che tuttavia i suoi risultati non rimangono isolati, smarriti, e quasi inschistati reciprocamente, ma si articolano di per sè stessi naturalmente con tutti gli altri in questa splendida e viva cooperazione di tutti gli organi della scienza che si va compiendo poco a poco — ma quasi inconsciamente — per rifare nello spirito nostro quella sintesi che già trovasi effettivamente nella natura.

Digitized by Google

§ 2.

Analisi ed apprezzamento della Logica matematica.

1. In base ai risultati ottenuti nelle nostre ricerche possiamo dire che la Logica matematica è la prima applicazione inconsapevole del nostro principio fondamentale della convertibilità delle idee primitive.

Essa si presenta infatti come un tratto di unione tra la Logica pura e la Matematica e facendo uso di un sistema coerente di notazioni simboliche, con un piccolo numero di nozioni primitive procede alla costruzione delle definizioni di tutte le altre nozioni derivate. È quindi prezzo dell'opera l'esaminare se il poco materiale adoperato dalla Logica matematica si accordi o meno con quel sistema fondamentale d'idee primitive che fu da noi riscontrato a termine delle nostre analisi di Logica e di Matematica. Se tra i due sistemi di idee primitive si verificasse una contraddizione vi sarebbe un errore da una parte o dall'altra. Ora, secondo quanto è dichiarato nel *Formulaire de Mathématiques* (Tome II, n. 3, Turin 1899, pag. 12): " Nous rencontrons trois idées primitives dans l'Arithmétique et trois dans la Géométrie. Dans la Logique le nombre des idées primitives est plus grand. On en trouvera une analyse dans F_2 N_1 ". Siccome noi abbiamo incontrato tre idee primitive nella Logica, si potrebbe pertanto credere, a tutta prima, che le nostre ricerche si trovino contraddette dai risultati della Logica matematica.

Per il sicuro fondamento del nostro lavoro s'impone quindi un'analisi accurata delle idee assunte come primitive dalla Logica matematica.

Digitized by Google

2. Tale è in parte l'assunto di questo capitolo. Prima però di affrontare direttamente l'esame delle nozioni primitive, crediamo opportuno — per comodità dei nostri lettori — di accennare a larghissimi tratti come fra i due campi distinti della Logica e della Matematica sia venuto ideandosi prima ed erigendosi poi sopra solide basi, un edifizio scientifico così importante che offre tanto ai filosofi quanto ai matematici il doppio vantaggio del rigore e della semplicità, sia rispetto alla teoria della conoscenza logica in genere, sia riguardo alla teoria della conoscenza matematica in specie.

Giova notare anzitutto che questa scienza fin dalle prime analogie annunziate profeticamente dal grande Leibniz (1646-1716) fra le operazioni della Logica e quelle della Matematica, ai poderosi incrementi aggiunti per opera di Lambert (1728-1777), Segner (1740), De Morgan (1806-1871), Boole (1815-1864), Hauber (1829), Jevons (1864), Peirce (1867), Mc-Coll (1878), Frege (1879), Schröder (1877-90-91-95), e del nostro Peano che l'introdusse in Italia nel 1888 e di molti altri che vi cooperarono alacremente, e in particolar modo del Burali-Forti, del Padoa, del Pieri e del Vailati, malgrado la difficoltà del metodo ideografico simbolico non famigliare a tutti, ha fatto e fa di giorno in giorno rapidissimi progressi, apprestando alla ricerca ed alla dimostrazione matematica uno strumento euristico e didattico sempre più sicuro e fecondo e riferenze filosofiche non ancora ben chiarite ma della massima importanza, benchè ottenute con scopo puramente scientifico.

Nella " Rivista di Matematica „ del Peano, T. 7, pag. 3, si trova l'elenco di 67 memorie pubblicate su quest'argomento nell'ultimo decennio. Altre sono da aggiungere.

Digitized by Google

3. Secondo il Peano la Logica matematica è la scienza che tratta delle forme di ragionamento che s'incontrano nelle varie teorie matematiche, riducendole a formole simili alle algebriche. Essa ha comune colla logica di Aristotele il solo sillogismo (1). Uno dei risultati più notevoli cui si è giunto — osserva inoltre lo stesso Peano al quale si deve la creazione di quel Formulario di Matematica che rimarrà nella storia come monumento scientifico della operosa genialità dello spirito matematico italiano (2) — si è che con un numero limitatissimo di segni si possono esprimere tutte le relazioni logiche immaginabili, sicchè aggiungendovi dei segni per rappresentare gli enti dell'Algebra o della Geometria si possono esprimere tutte le proposizioni di questa scienza (3).

Non è senza importanza notare, a questo riguardo, che tale risultato fu ottenuto osservando, in primo luogo, che nelle scienze matematiche, come in ogni altra scienza, non compaiono altro che idee e giudizi variamente combinati fra loro, e quindi è sommamente opportuno cominciare a studiare separatamente prima le idee poi i giudizî; in secondo luogo, che le idee delle scienze matematiche appartengono in parte alla Grammatica generale o Logica, in parte alle discipline matematiche speciali; e che tanto delle prime quanto delle seconde la Logica matematica ha stabilito una rigorosa clas-

(1) « Revue de Mathématiques », publiée par G. Peano, tome VII, n. 3, 1901, pag. 169.

(2) Vi cooperarono in modo particolare: C. Burali-Forti, F. Castellano, M. Chini, A. Padoa, M. Pieri, G. Vacca, G. Vailati, G. Vivanti e molti altri.

(3) « Rivista di Matematica », 1891, *Principî di Logica matematica*. Nota di G. Peano.

Digitized by Google

sificazione, rappresentandole, per i bisogni del calcolo, con segni o simboli ideografici corrispondenti.

4. Prendendo le mosse da questi preliminari, cominciamo a notare che tutte le idee logiche generali che incontransi nelle pubblicazioni matematiche — e segnatamente in quello che si dice, con molta proprietà, il *dizionario di matematica* — sono riduttibili ai simboli ideografici seguenti:

1	$=$	è uguale,
2	*cls*	classe,
3	ϵ	è (un),
4	$\ni$	tale,
5	$\supset$	dunque,
6	$\cap$	e,
7	$\cup$	o,
8	$-$	non,
9	Λ	assurdo,
10	$\exists$	esiste,
11	ι	eguale,
12	$\supset$	quel.

Aggiungasi:

13	*a*, *b*, ...	lettere variabili per indicare degli oggetti qualunque,
14	(), [], } {	parentesi per indicare l'ordine di raggruppamento dei segni.

Sono in tutto quattordici segni di nozioni generali che possono ancora a mente dei più competenti autori di Logica matematica essere ridotti ad un numero assai minore. Il Burali-Forti, infatti, nel suo *Trattato*

Digitized by Google

di Logica matematica pone nell'elenco dei segni appartenenti alla Logica i seguenti (1):

1	ϵ	è un,
2	$\supset$	si deduce,
3	$=$	è equivalente,
4	$\cap$	e,
5	$\cup$	o,
6	$-$	non.

Se ne aggiungono tre altri:

7	*cls*	classe (nome comune) o attributo,
8	*a*, *b*, ...	individuo (nome proprio) o soggetto,
9	(), [ ], }{	punti o parentesi,

di cui si fa uso implicito ed esplicito comunemente; e risultano in tutto nove segni di nozioni generali fondamentali.

" Per mezzo di questi segni logici e dei segni proprî di una determinata scienza, possiamo esprimere tutte le proposizioni della scienza stessa " (l. c., pag. 10).

Il Peano nel suo *Formulaire de Mathématiques* (tome II, § 1, *Logique Mathématique*, 1897) scrive: " Par les six notations précédentes (κ, ϵ, $\square$, $a \,.\, b$ ..., $\supset$, $\cap$) nous définirons symboliquement toutes les idées de Logique exceptées celles qui figurent dans les P 70 et 100 " (pag. 27).

Aggiungendo pertanto alle sei prime queste due ultime idee: coppia (P 70), negazione (P 100) si ottiene l'elenco seguente:

---

(1) C. Burali-Forti, *Logica matematica*. Manuali Hoepli, Milano, 1894, cap. I, Nozioni generali, pagg. 1-9.

Digitized by Google

1	κ	classe,
2	ϵ	è un,
3	(), [], } {	parentesi o punti,
4	a, b, ...	lettere variabili,
5	⊃	deduzione,
6	∩	affermazione simultanea,
7	(x, y)	coppia,
8	—	negazione.

5. Perchè la nostra analisi riesca accurata e completa prendiamo in minuto esame ognuno di questi otto segni, premettendo che essi possono venire immediatamente raggruppati in due categorie:

1° termini nominali, o di materia, o di quantità;

2° termini verbali, o di forma, o di qualità, o di relazione, o d'operazione.

Nella prima categoria ne porremo due:

I. - *classe* di enti o di oggetti (nome comune).

II. - *individuo,* lettere variabili rappresentanti enti o oggetti individuali indeterminati qualunque a, b ... z, a' (nome proprio).

Nella seconda categoria raggrupperemo tutti i sei rimanenti:

1	ϵ	è un,
2	(), [], } {	parentesi o punti,
3	⊃	deduzione,
4	∩	affermazione simultanea o prodotto logico,
5	(x, y)	coppia,
6	—	negazione.

6. Per quanto riguarda la prima categoria ci limitiamo ad osservare che:

Digitized by Google

1° il termine " *classe* „ significa nome comune, idea generale, *terminus*, ὅρος, ὄνομα, concetto, campo, gruppo, insieme di oggetti, sistema, categoria d'enti, *Menge*, *Begriff*. La classe è considerata esclusivamente dal punto di vista dell'estensione, poichè: " Dans une classe nous considérons seulement la propriété de contenir des individus et de ne pas contenir d'autres individus „ (pag. 39). Da ciò risulta che il concetto di classe non è distinto da quello di somma logica o estensione;

2° il termine " *lettere variabili* „ *a*, *b*, ... *x*, *y*, *z*, designa degli oggetti qualunque o più propriamente degli individui o enti particolari o nomi proprî. In conseguenza di che possiamo concludere riconoscendo circa questa prima categoria la perfetta conformità tra i due enti della Logica matematica: classe e individuo da un lato, e i due enti corrispondenti: idea di classe e idea di individuo, riscontrati nella Logica pura.

7. Per quanto riguarda la seconda categoria, dobbiamo cercare di ridurre i sei enti logici rimanenti al minor numero possibile. Il còmpito ci è agevolato, fortunatamente in qualche parte, dal Peano medesimo che nelle sue acute note dichiarative del " Formulario „ non manca mai di accennare alla possibilità ed al modo di introdurre una maggiore semplificazione nell'elenco delle idee logiche assunte come primitive.

In base quindi ai risultati analitici già ottenuti dal Peano e alle nostre personali ricerche osserviamo:

1° Il termine " *parentesi o punti* „ non è primitivo non essendo altro che un segno convenzionale indicante i raggruppamenti dei termini. Si noti anzi tutto che " nel linguaggio ordinario non vi sono parentesi „ (Peano, loc. cit., pag. 23). Da ultimo si ponga

Digitized by Google

mente che l'affermazione o posizione stessa di qualunque termine o idea è già di per sè stessa una limitazione o separazione o raggruppamento distinto di termini. Quindi non occorre dar origine ad un segno nuovo per significare ciò che si verifica già nella posizione mentale distinta di ogni ente che è sempre una posizione di limite o di limiti. Questa riduzione non è ancora ammessa dal Peano.

2° Il termine " non " (—) significante la negazione, non è primitivo potendosi definire mediante i termini seguenti: cls. ϵ, $\supset$, $\cap$, $\cup$, e in modo particolare, mediante l'idea della somma logica come è già provato dal Peano stesso (op. cit., pag. 45, P 257).

In verità, come in Aritmetica abbiamo posto che quando sia noto il significato del segno $+$ si può, dall'idea dell'addizione espressa dal segno $+$, dedurre quella della sottrazione, espressa dal segno —, giungendo all'ordinaria definizione: un numero si dice la differenza di altri due numeri disuguali quando sommato col minore di essi dà per somma il maggiore (1), così in Logica matematica potendosi esprimere il segno — facendo uso segnatamente del segno $\cup$ e potendosi esprimere (P 241) il segno $\cup$ facendo uso delle idee primitive introdotte con le P 1 — 7 " l'idée de la négation n'est pas primitive " (Peano, op. cit., pag. 51).

3° La notazione " (x, y) " è introdotta dalla P 70 per indicare la coppia formata dall'oggetto x e dall'oggetto y. Questa coppia è considerata come un nuovo oggetto. Analogamente (x, y, z) designa la terna degli

(1) Quando la frase *disuguali* significhi *uno maggiore dell'altro* e non *non uguale* il che implica altre proprietà dei numeri. Cfr. Burali-Forti, op. cit., pag. 132.

Digitized by Google

oggetti x, y, z o se si vuole la coppia formata della coppia (x, y) e dell'oggetto z. Ora questa nuova notazione può essere considerata come derivata per le ragioni seguenti. Si noti che la coppia (x, y) pur non essendo immediatamente riducibile nè alla somma logica dei due oggetti (affermazione disgiunta) $(x + y)$, nè al prodotto logico di essi (affermazione simultanea) $(x \times y)$, è però riducibile alla forma: " (x, y) è un individuo della classe a dove a è una classe di coppie determinate, cioè l'affermazione simultanea delle proprietà di x ed y che soddisfano ad una stessa condizione. "

La relazione fra i due enti dati viene così espressa da una condizione o più propriamente da un sistema di condizioni fra i due enti variabili che si risolve nel fatto d'un'affermazione simultanea o prodotto logico delle condizioni date. La notazione (x, y) quindi è riduttibile alle nozioni generali dell'inclusione e dell'affermazione simultanea.

4° Il termine " e " ($\cap$) significante prodotto logico o affermazione simultanea o congiunzione è o non è primitivo?

Notiamo, anzi tutto, che il prodotto logico di due classi a e b non essendo altro che la classe comune alle due classi date, cioè la classe comune in cui le due classi a e b sono contenute simultaneamente, si risolve nel fatto della congiunzione simultanea cioè dell'inclusione logica delle due classi.

Difatti l'affermazione simultanea delle due classi a e b designa che l'insieme delle condizioni che definiscono una classe è incluso nell'insieme delle condizioni che definiscono l'altra, ciò che costituisce appunto il prodotto logico delle classi corrispondenti. L'espressione $a \cap b$, o più comunemente ab, si può dunque leggere: l'inclusione simultanea delle due classi a e b

Digitized by Google

in una classe comprensiva comune, oppure la classe a è contenuta comprensivamente nella classe b. In altri termini: il prodotto logico si riduce all'affermazione simultanea di classe in classi, cioè all'inclusione simultanea delle classi.

Ed è tanto vero che il prodotto logico indica inclusioni così di classi come di proposizioni, che dal prodotto logico ab, per esempio, si può dedurre a per la sola ragione evidente che a è incluso in ab; come è chiaro che da un prodotto si possono dedurre i suoi fattori, per la semplice ragione che sono logicamente contenuti nel prodotto medesimo. Donde risulta che dato per ipotesi (che noi verremo tosto a giustificare) che uno qualunque almeno dei tre termini che ci rimangono da definire, ϵ, $\supset$, $=$, sia riduttibile all'idea d'inclusione, noi potremo sempre scrivere un'eguaglianza di cui il primo membro sia $a \cap b$ e il secondo un'espressione dove non figurano che le tre idee ϵ, $\supset$, $=$.

Dunque il termine $\cap$ non è primitivo.

Questa riduzione non è ancora ammessa dal Peano il quale scrive: " Toutefois nous ne pouvons pas écrire une égalité dont le premier membre soit $a \cap b$ et le deuxième une expression où ne figurent que des idées primitives „ (pag. 32).

Giova però ritenere che il Peano stesso intravide già la parziale riduttibilità della moltiplicazione logica, quando scrisse a proposito della P 74:

" La P 74 contient les deux précédents. Si l'on supprime la lettre y, on obtient la P 15. Remarquons que dans le premier membre de l'égalité ne figure pas la multiplication logique, qui figure dans le second. Donc la multiplication logique, donnée comme idée primitive (P 6), est, dans quelques cas, réductible „.

Ora speriamo di aver provato, per le osservazioni

Digitized by Google

precedenti, che la moltiplicazione logica è riduttibile in tutti i casi.

5° Il termine " dunque „ ($\supset$) significante:

1° è contenuto (tra classi);

2° si deduce (tra proposizioni);

è o non è primitivo?

A questo riguardo è bene osservare che il Peano ha già trovato che " on voit la possibilité de remplacer l'idée de la déduction donnée comme primitive (P 5), par l'idée de l'addition logique „ (pag. 46).

La somma logica, a sua volta, non è posta — come è noto — nell'elenco delle idee primitive perchè si può costruire una proposizione (P 241) contenente " dans le premier membre la somme logique $a \cup b$, et dans le second une expression composée par les signes κ, ϵ, $\supset$, $\cap$, où ne figure pas le signe —. On pourrait donc la prendre pour définition du signe $\cup$, indépendante de la négation „ (pag. 44).

Ciò premesso, si noti che i due sensi riferiti della deduzione (è contenuto; si deduce) si riducono entrambi al concetto unico d'inclusione. Infatti, nel primo significato (è contenuto; tra classi) la relazione di contenenza è già espressamente indicata dalle parole stesse che si adoperano per la lettura. Al quale oggetto avverte lo stesso Peano (*Dizionario di Matematica*, p. 164) alla parola " contenere = (la classe a è contenuta in b) = (dall'essere a si deduce l'essere b) = ($a \supset b$). „

Quanto al secondo significato (si deduce; tra proposizioni) ricordando che il segno $\supset$ non è altro che la lettera iniziale rovesciata del termine " conseguenza „ [($p \supset q$) = (q è conseguenza di p)], è facile intendere che coll'uso della deduzione non si fa altro che affermare che la proposizione p o conseguenza (tesi) è contenuta nella q o proposizione precedente (ipotesi).

Digitized by Google

Con ciò riprendiamo ed applichiamo un grande pensiero di Leibniz il quale non ha mai cessato d'insistere sulla profonda analogia che passa tra le relazioni di deducibilità o di equivalenza di proposizioni e le relazioni di inclusione o di coincidenza di classi.

" Quest'idea contenuta nel Saggio portante il titolo: *Generales inquisitiones de analysi notionum et veritatum* (1686) sembra essere stata suggerita a Leibniz — avverte acutamente il Vailati — dal " parallelismo " (già notato da Pascal) tra i processi di dimostrazione e di riduzione delle proposizioni le une alle altre. Allo stesso modo — egli osserva — come la proposizione " *A est B* " significa che le condizioni richieste per l'applicazione del nome *A* implicano, o contengono, le condizioni indicate dal nome *B*, così la proposizione: " *Si A est B, C est D* " esprime che l'affermazione (1) *A est B, contiene* o implica come conseguenza la proposizione " *C est D* "; per modo che essa può essere indicata con: "(*A continet B*) *continet* (*C continet D*) " o anche: " (*A est B*) *est* (*C est D*).

" La perfetta conformità tra le proprietà della copula " *est* " (o " *continet* "), nei due casi, è da Leibniz riconosciuta ed enunciata in modo non meno chiaro ed esplicito di quanto avvenne più tardi per parte di Peano (1888) e Schröder (1891): " *Per A aut B intelligo vel terminum vel enunciationem* " (COUTURAT, pagina 355) " (2).

Tra l'inclusione delle classi espressa dal primo si-

---

(1) « *Cum dico* A *est* B, *et* A *et* B *sunt propositiones, intelligo ex* A *sequi* B » (COUTURAT, pag. 355, nota 1). (Nota del VAILATI).

(2) G. VAILATI, « Revue de Mathématiques », tome VII, n. 3, Turin, 1901, pagg. 155-56.

Digitized by Google

gnificato e l'inclusione o deducibilità delle proposizioni espressa dal secondo, non passa quindi una differenza essenziale ma solo di grado o di complessità di termini. In ogni caso colla deduzione non si fa altro che esprimere l'inclusione sia di classe in classi sia di proposizione in proposizioni. Posto dunque che l'idea d'inclusione sia primitiva, ne viene che l'idea di deduzione deve — per rispetto ad essa — ritenersi come derivata. Giova ancora notare, prima di passare all'analisi dell'ultimo ente logico proposto, la grande relazione che intercede fra la moltiplicazione logica e la deduzione, le quali non sono altro che operazioni che si derivano o proprietà che si deducono logicamente dallo stesso concetto primitivo dell'inclusione.

6° Fissiamo ora la nostra attenzione sul termine " ϵ „ significante *è un*.

Nel " *Formulaire de Mathématiques* „ (tome II, § 1, *Logique Mathématique*, pag. 20) si avverte: " Soit a un κ; nous écrirons $x \epsilon a$ pour indiquer la proposition singulière " x est un a „. Le signe ϵ est l'initial du mot ἐστί. Selon la notation 2 (ϵ), que nous venons d'expliquer, la formule $x \epsilon a$, si a n'est pas une κ, n'a pas de signification. „

Da ciò risulta chiaramente che questo termine è considerato dal punto di vista dell'estensione, quindi la proposizione singolare $x \epsilon a$ in cui x è il soggetto, a il predicato, vuol dire x è *un individuo contenuto nell'estensione* della classe a; in altri termini " subjectum inest praedicato „ (*De individuis loquimur non de ideis*).

Il segno ϵ si legge pertanto in tutti i modi seguenti: è un, è un individuo di, è in, è contenuto in, è nell'estensione di, appartiene a, fa parte di. In ogni caso denota l'affermazione dell'inclusione d'un individuo in una classe; la relazione dell'individuo alla classe; del

Digitized by Google

soggetto (nome proprio) all'attributo (nome comune) d'una proposizione particolare grammaticalmente semplice.

Nell'intento di porre in luce la differenza che passa tra i segni $\in$ e $\supset$ il Burali-Forti scrive opportunamente (1): " I segni $\in$ e $\supset$ si leggono spesso nel linguaggio comune nel medesimo modo. Dicendo, per esempio, " l'uomo è un bipede „ intendiamo dire " ogni uomo è un bipede „, e traducendo in simboli scriviamo *Uomo* $\supset$ *Bipede* e non *uomo* $\in$ *bipede*, poichè con quest' ultima forma trascuriamo *ogni* o l'articolo *lo*, che dà alla frase il suo esatto significato. Se alla parola *oro* diamo il significato chimico di corpo semplice, allora scriviamo: *oro* $\in$ *corpo semplice* e non *oro* $\supset$ *corpo semplice*. In generale scriviamo $a \in b$ quando a è un individuo (o è considerato come tale) di una classe (la classe b); scriviamo $a \supset b$ quando a (e b) è una classe. La differenza essenziale tra i segni $\in$ e $\supset$ sta in questo che mentre dalle affermazioni simultanee $a \supset b \,.\, b \supset c$, $a \in b \,.\, b \supset c$, si può dedurre (P 8, 9) che $a \supset c$ o $a \in c$, dall'affermazione simultanea $a \in b \,.\, b \in c$ nulla si deduce, essendo b considerato prima come classe, poi come individuo di una classe. Così, p. es., nulla si deduce dall'affermazione simultanea della proposizione $5 \in Np$, $Np \in$ (classe contenente infiniti individui). „

8. Ora questa distinzione sta bene. Noi abbiamo assoluto bisogno di dar un segno particolare tanto all'affermazione di inclusione di un individuo in una classe ($\in$), quanto all' affermazione d' inclusione d'una classe in una classe ($\supset$), come abbiamo bisogno, per esempio,

(1) Burali-Forti, op. cit., pagg. 70-71.

Digitized by Google

di tener separato conto delle varie proprietà del prodotto e della somma e di dar segni particolari alle idee derivate di prodotto, di somma, di eguaglianza, di negazione, di assurdo e via discorrendo. Tuttavia la differenza notevolissima tra i due segni ϵ e $\supset$ non ci deve impedire di riconoscere che un solo concetto veramente primitivo, quello di affermazione d'inclusione — variamente applicato, a seconda che si pone come soggetto o l'uno o l'altro dei due termini nominali assunti come primitivi nella prima categoria (classe o oggetti individuali variabili) — sta sotto tutti: segni assunti finora e riferiti ed è capace di dar origine a tutte le operazioni logiche necessarie alla costruzione della Logica matematica.

A qualunque individuo un po' adulto è famigliare il concetto dell'inclusione; rispetto ad essa, per conseguenza, non esiste alcuna arbitrarietà avendo esso un significato a tutti noto. Quindi, per noi, definire i termini: inclusione d'individuo, deduzione, somma, prodotto, eguaglianza, differenza, ecc., significa solo *determinare le proprietà più semplici derivanti dai varî rapporti che possono intercedere tra i tre termini primitivi: classe, individuo ed inclusione.*

Le operazioni fondamentali della Logica si possono dunque ottenere quando si sia dato un significato alle frasi: " includere un individuo in una classe ", includere una classe in una classe ", ecc., con un'applicazione che i lettori esperti possono fare da sè medesimi. Giova ancora rammentare che queste operazioni non si possono neppure pensare senz'ammettere che esse si compiano *successivamente* cioè *una dopo l'altra,* con un procedimento che non è quindi essenzialmente distinto da quello che si compie in aritmetica, in geometria ed in fisica rispetto all'idea di successione,

Digitized by Google

rappresentazione di punto in punto, moto, tempo. Così a rigor di logica con questi tre soli segni: classe, lettere variabili, inclusione, si potrebbero esprimere tutte le idee della Logica, indipendentemente dalle difficoltà materiali che si incontrano in tale rappresentazione ed in modo affatto analogo a quanto si verifica e si conclude nell'analisi della teoria dei numeri interi (1).

È soltanto per evitare tale difficoltà che, per definizione, potremo dunque continuare a porre ϵ, $\supset$, $\cap$, $\cup$, $=$, ..., ma questi segni derivati non sono necessari.

9. Dunque con successive riduzioni dei varî enti logici considerati come primitivi dalla Logica matematica, noi siamo giunti a conservarne solo tre rappresentati dai termini: " classe, individuo, inclusione ", disponibili anche nel modo seguente:

1° termini nominali { classe, individuo,

2° termini verbali: inclusione.

10. Un'ulteriore riduzione non sembra possibile. Questi tre termini fanno perfetto riscontro con quelli che abbiamo già trovato nell'analisi della Logica (Grammatica, Logica naturale, Logica pura), della Matematica (Aritmetica, Geometria), della Fisica (Fisica matematica, Meccanica razionale); essi rappresentano quindi idee primitive, idee semplici, che qualunque uomo possiede, e che noi definiamo *in sè stesse* (2) ammettendo che, per esse, sieno vere certe proprietà dalle quali possono dedursi logicamente le altre.

(1) Burali-Forti, op. cit., pagg. 130-140.
(2) Burali-Forti, op. cit., pag. 135.

Digitized by Google

Non potendo entrare per ora nei particolari della applicazione di tali proprietà, che chiamiamo fondamentali perchè risultano immediatamente dalla posizione delle tre idee primitive, concludiamo con una osservazione della massima importanza circa la posizione ed il valore strumentale della Logica matematica e la sua definizione.

11. Che le idee espresse dai tre termini riferiti sieno le più semplici che la mente nostra abbia riguardo agli enti della Logica matematica, risulta evidentemente dall'analisi da noi fatta.

Che tali idee non differiscano essenzialmente da quelle tre che abbiamo riscontrato nelle analisi corrispondenti della Logica e della Matematica, è provato dall'elenco delle idee primitive riferito nel capitolo IV.

12. Da ciò risulta che per esprimere tutte le proposizioni di una determinata teoria matematica non è affatto necessario aggiungere ai segni proprî di questa scienza i segni speciali appartenenti alla Logica. Una esposizione rigorosa dell'Aritmetica e della Geometria infatti non solo può farsi in modo del tutto indipendente, così dalla Logica in generale come dalla Logica matematica in particolare, ma *deve farsi assolutamente in sè stessa*, senza bisogno di ricorrere ai segni logici, poichè le idee primitive della Logica non essendo essenzialmente differenti da quelle della Matematica — quando sono introdotte nell' organismo di un' altra scienza — non fanno altro che generare un duplicato ingombrante l'esposizione e alterare l'unità e l'armonia delle leggi scientifiche. Tali sono le esigenze della struttura e direi quasi dell'architettura tipica delle varie scienze. Questa conseguenza è inevitabile.

Digitized by Google

13. I nostri lettori sono quindi in grado di comprendere che il *Formulario di Matematica* è ancora suscettibile d'una ulteriore semplificazione nel senso che tutto l'apparato della Logica matematica può essere radicalmente soppresso con grande vantaggio del rigore e della comprensibilità, giacchè ognuno comprende agevolmente che la differenza tra queste tre categorie di enti primitivi:

1ª Logica	classe individuo inclusione
2ª Aritmetica	numero uno successione
3ª Geometria	classe di punti un punto moto

non è che apparente, riducendosi esse — in ultima analisi — ad un sistema fondamentale comune.

14. Posto dunque il principio fondamentale della piena e mutua convertibilità delle categorie logiche, aritmetiche e geometriche, ne risulta che è tanto esatto l'asserire che la Matematica è un processo logico, quanto l'affermare che la Logica è un processo matematico, in conformità di quanto fu da noi stabilito nella conclusione del capitolo IV.

Anche la stessa definizione della Logica matematica deve per conseguenza venire modificata. Infatti la definizione che si riscontra nel Dizionario di Matematica del Peano: " La Logica matematica è la scienza che " tratta delle forme di ragionamento che s'incontrano

Digitized by Google

" nelle varie teorie matematiche, riducendole a formule " simili alle algebriche „ (pag. 169) è ammissibile solo nel caso che si ritenga necessario, per esprimere tutte le proposizioni di una teoria matematica determinata, aggiungere ai segni proprî di questa determinata teoria matematica anche i segni proprî della teoria logica.

E in vero finora fu ammesso comunemente da tutti gli scrittori di Logica matematica che le idee delle scienze matematiche appartengono in parte alla Grammatica generale o Logica, in parte alle discipline matematiche speciali e che tanto delle prime quanto delle seconde la Logica matematica ha stabilito una rigorosa classificazione rappresentandole per i bisogni del calcolo con segni o simboli logici e matematici corrispondenti. Ora però risultando provato che la Logica e la Matematica hanno un contenuto d'idee primitive comune e potendo, anzi dovendo, a rigor di logica, la disciplina matematica essere esposta assolutamente in sè stessa senza bisogno di ricorrere ai segni della disciplina logica, la definizione più ovvia della Logica matematica appare la seguente.

15. *La Logica matematica è la scienza che sostituisce la formalità della Matematica alla formalità della Logica nella trattazione delle idee primitive che sono comuni alle due scienze.*

Questa definizione ha — a parer nostro — il vantaggio di porre in evidenza:

1° che la Logica matematica non è altro che una disciplina che tratta della formalità logica dal punto di vista della formalità matematica (un modello matematico della Logica) (1);

(1) La veste matematica della Logica.

Digitized by Google

2° che la Logica e la Matematica non differiscono nel fondamento loro, perchè ammettono un sistema di idee primitive comune ad entrambe.

Questa definizione chiarisce anche definitivamente la posizione della Logica matematica nella classificazione generale delle scienze.

Dati i tre ordini di scienze analizzati: Logica, Matematica, Fisica; la Logica matematica appare, come fu detto nel § 2 del capitolo presente, la prima applicazione scientifica del principio della piena e mutua convertibilità delle idee primitive di queste tre discipline, non essendo altro che la combinazione delle due prime formalità scientifiche date, (Logica e Matematica). Ad essa tengono dietro tutte le altre discipline miste: Logica sperimentale, Fisica matematica, Meccanica razionale, ecc., che si possono logicamente costruire sullo stesso principio e da un altissimo punto di vista sono pienamente convertibili fra loro (1).

---

(1) I due principî della convertibilità e dell'unificabilità teorica delle varie idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica ci spingono ad ammettere che si potrebbe fare un *Formulario sintetico*, comune alle varie discipline scientifiche. Il che si potrebbe ottenere portando le seguenti modificazioni al Formulario di matematica attuale:

1ª La Logica dovrebbe essere redatta non per servire all'esposizione della Matematica, ma in modo assolutamente indipendente partendo dal puro sistema delle idee primitive stabilite e comprendendo nel suo campo tutta quanta la teoria della Logica pura.

La Logica matematica, come l'esposizione della Logica dal punto di vista della Matematica, non perderebbe la sua ragione di essere; soltanto si dovrebbe considerare come derivata rispetto alla Logica pura ed alla Matematica pura;

2ª La Matematica resterebbe nel suo contenuto invariata nel senso che continuerebbe a derivare tutta quanta dalle idee primitive stabilite nell'Aritmetica e nella Geo-

Digitized by Google

16. Chiuderemo questa rapida rassegna della Logica matematica, notando come, anche per questo riguardo, il grande Leibniz sentì già chiaramente il concetto generale di un unico algoritmo operatorio (*calculus ratiocinator*) che gli fu come l'intima sorgente di tutte le sue speculazioni ed applicazioni generali tanto nel campo logico e filosofico quanto nel campo matematico.

Il volume del Couturat, il quale raccogliendo un immenso materiale di ricerche logiche e matematiche sparso nei varî scritti di Leibniz — che si potevano prima consultare tanto difficilmente — ha reso un vero e grande servizio alla storia del pensiero filosofico e matematico, mette in luce chiaramente che l'idea madre delle sue ricerche logiche gli fu suggerita da Aristotele, giacchè dall'idea della classificazione delle categorie aristoteliche salì all'idea di una classificazione dei giudizî, quindi giunse all'idea dell'alfabeto dei pensieri umani (Couturat, pag. 35). A diciotto anni concepisce quest'idea che lo fa esultare " *puerili quodam gaudio* "; e non ancora ventenne pubblica il

---

metria. Ma dovrebbe essere alleggerita dalla formalità della Logica matematica, inutile duplicato per una scienza che può costruirsi in sè stessa indipendentemente da ogni altra.

3ª La Fisica dovrebbe essere trattata collo stesso metodo, facendola cioè derivare dalle sue idee primitive stabilite e costruendola pure in sè stessa indipendente.

La Fisica matematica e la Meccanica razionale, come applicazioni ulteriori del principio della convertibilità delle idee primitive, cioè come studî della Fisica dal punto di vista matematico e logico (razionale), non perderebbero la loro ragione di essere, soltanto apparirebbero derivate rispetto alla Fisica, alla Matematica ed alla Logica, come sono. Tutte queste applicazioni scientifiche miste, esposte metodicamente, dovrebbero quindi trovare anche il loro posto nel *Formulario sintetico* unico.

Digitized by Google

suo scritto " *De arte combinatoria* „ di cui la logica d'invenzione, o l'arte d'inventare, è un'applicazione feconda.

È estremamente notevole il fatto che se l'opera ha molti errori di particolari ed imperfezioni provenienti dalla giovinezza dell'autore e dalla sua relativa ignoranza delle matematiche, l'autore in seguito — pur qualificandola un " *essay d'escolier* „ aggiunge: " *mais le fond est bon et j'ay basti la-dessus* „.

Chi ami seguire la storia delle idee attraverso i varî sistemi dei pensatori potrebbe notare a questo punto che Leibniz non ha mai — in fondo — abbandonato il meccanismo cartesiano, per quanto abbia sempre cercato di contrapporvi il suo dinamismo. Anch'egli finisce per ammettere che tutto nella natura deve potersi spiegare meccanicamente, soltanto aggiunge che le sorgenti di questo meccanismo fisico universale sono da ricercarsi nella metafisica (*ex altiore causa*).

Insomma in tutta la sua opera il grande pensatore segue come la legge fisica ed invariabile d'un meccanismo ideale, nell'intento supremo di raziocinare, numerare e geometrizzare sistematicamente tutto l'ordine scientifico delle cognizioni umane.

Digitized by Google

Digitized by Google

PARTE SECONDA

GLI ASSIOMI

Digitized by Google

Digitized by Google

CAPITOLO PRIMO

Classificazione degli assiomi e controversie.

---

1. Dopo d'aver preso cognizione delle idee delle scienze astratte (Logica, Matematica) e astratte-concrete (Fisica — meno la Chimica) dobbiamo procedere alla cognizione dei giudizî.

Lo studio dei giudizî è, in certa guisa, lo studio delle idee in azione.

Ora, tutti i giudizî che compaiono nella scienza si dividono in due categorie:

1ª giudizî primitivi espressi da proposizioni primitive (assiomi, postulati);

2ª giudizî derivati espressi da proposizioni derivate (teoremi, corollarî), secondo che si possono o non si possono dimostrare.

Dimostrare una proposizione significa ottenerla, combinando convenientemente le proposizioni ammesse. Quindi — avverte giustamente il Peano (1) — alla

---

(1) G. Peano, « Rivista di Matematica », pag. 25. Torino, 1891.

Digitized by Google

domanda: una data proposizione si può dimostrare? si può soltanto rispondere, quando si sia esplicitamente detto di quali proposizioni ci possiamo servire. Ora il semplice criterio intuitivo non è punto in grado di farci riconoscere immediatamente a quale categoria appartenga una data proposizione, perchè se noi ci abbandoniamo a quel carattere di subitanea unità e immediatezza, con cui s'intuiscono le varie proposizioni elementari, non possiamo più affatto immaginare che esse possano essere invece dei processi logici composti e decomponibili in varî elementi diversi. Di più noi dobbiamo ammettere che certe supposizioni assiomatiche sono essenzialmente vere e di fronte al giudizio nostro perfino necessarie, dando però a questa parola "necessità" il senso di pura esigenza logica, eretta sul semplice fatto della necessità dell'abitudine di non cadere in contraddizione — perchè, in ogni caso, il giudizio assiomatico suppone sempre il giudizio medesimo come autorità della sua verificazione e si suppone tale perchè ogni altra supposizione logica suppone sempre la stessa autorità del giudizio.

2. In questo capitolo ci occuperemo soltanto dei giudizî primitivi, o assiomi, o postulati (1) della Logica, della Matematica e della Fisica, cioè delle scienze astratte e delle scienze astratte-concrete (meno la Chimica) secondo il criterio della Classificazione delle scienze dello Spencer, criterio che io ritengo pienamente accettabile, almeno per ciò che si riferisce alla scienza in senso stretto.

Ora è ovvio osservare che se la classificazione ge-

(1) Alcuni fanno differenza fra assioma e postulato a seconda del grado di evidenza.

Digitized by Google

nerale degli assiomi segue, naturalmente, la classificazione generale della scienza, il concludere che gli assiomi sono di tre specie: astratti, astratti-concreti e concreti ci porta a toccare un argomento molto notevole.

3. In primo luogo, ritenendo che i giudizî primitivi delle scienze astratte o analitiche concernono esclusivamente le idee e le relazioni delle idee; e che i giudizî primitivi delle scienze concrete o sintetiche riguardano esclusivamente gli oggetti della natura e le loro relazioni naturali, è facile scorgere quant'analogia passi tra questa classificazione dei giudizî primitivi e la distinzione fra le due classi dei giudizî in generale, che fu vista e stabilita esattamente — pur partendo da altri criterî — dal padre della filosofia empirista odierna, David Hume.

V'hanno infatti — secondo Hume — due classi di giudizî. L'una concerne le relazioni delle idee, l'altra le cose di fatto.

Il Guastella (1) — che ha studiato, molto valorosamente, tutta questa questione, partendo dal criterio di David Hume — divide appunto i giudizî in due categorie:

1° *a priori*, o sulla somiglianza (giudizî comparativi);

2° *a posteriori*, o sulla esistenza (giudizî esistenziali).

I giudizî comparativi — per lui — sono *a priori* nel senso che, per stabilirli non è necessaria l'espe-

(1) Cosmo-Guastella, *Saggi sulla Teoria della Conoscenza*. Saggio primo: « Sui limiti e l'oggetto della Conoscenza *a priori* ». Palermo, Remo Sandron, ed., 1898.

Digitized by Google

rienza delle cose reali; poichè l'osservazione degli oggetti stessi può essere sostituita dall'osservazione delle idee di questi oggetti. I giudizî esistenziali o positivi sono invece *sempre a posteriori* perchè, per stabilirli, non possiamo dispensarci dall'esperienza, cioè dall'osservazione degli oggetti. Da questo punto di vista, non si possono più ammettere giudizî *a priori* sull'esistenza; dal primo ordine (dai giudizî comparativi) nascono quindi le verità necessarie; dal secondo ordine (dai giudizî esistenziali) nascono le verità contingenti. Alcun giudizio esistenziale (concernente cose di fatto) non può dunque essere necessario perchè l'opposto di ciascun fatto rimane sempre possibile, non implicando alcuna contraddizione (1).

4. Il Guastella ha — secondo me — ragione di voler distinguere nettamente il caso dell'osservazione delle idee, da quello delle osservazioni delle cose. Al primo corrisponderebbero gli assiomi delle scienze astratte o analitiche, al secondo quelli delle scienze concrete o sintetiche. Ma egli non ha veduto che vi ha ancora un terzo caso che tramezza i due riferiti, ed

---

(1) Aggiungiamo ancora che l'apriorità dei giudizî sulla somiglianza consiste, pel Guastella, nella possibilità di conoscere i rapporti tra le cose per la pura comparazione delle idee, distinguendo sempre rigorosamente i casi dell'*osservazione delle idee* dai casi dell'*osservazione degli oggetti.*

Con questa intesa, riconoscendo, per esempio, che la verità dell'affermazione contenuta in una proposizione matematica è logicamente indipendente dalla verità o falsità dell'affermazione dell'esistenza di oggetti reali a cui questa proposizione si riferisce, gli è possibile dichiarare che gli empiristi (fra cui egli si schiera decisamente, pur conservando una posizione originale) hanno avuto torto di negare

Digitized by Google

è precisamente quello delle scienze astratte-concrete che sono costruite, parte coll'osservazione delle idee, parte coll'osservazione degli oggetti ed a cui competono giudizî primitivi speciali. Di più non si vede bene la necessità di dare un valore esistenziale ai soli giudizî ricavati coll'osservazione degli oggetti, riserbando il valore comparativo ai giudizî ricavati dall'osservazione delle idee.

Se tanto all'esistenza quanto all'esperienza si ammettono due forme distinte: una oggettiva ed esterna (esistenza ed esperienza delle cose), l'altra soggettiva ed interna (esistenza ed esperienza delle idee); se si ammette insomma che ogni giudizio implichi sempre l'esistenza di un oggetto (sia reale, sia ideale) o di rapporti tra certi oggetti (sia realmente esistenti fuori di noi, sia semplicemente rappresentabili) scompare ogni ragione di tener distinti i giudizi esistenziali (fondati sull'osservazione delle cose) dai giudizî comparativi (fondati sull'osservazione delle idee).

Ora in ogni giudizio si può ben ritenere per accordato che lo spirito postuli sempre l'esistenza o di qualche oggetto reale o ideale o di qualche rapporto. Nè — a vero dire — si può credere di poter respingere l'esi-

---

l'*apriorità* delle matematiche pure, che è, per lui, la particolarità più saliente per cui si distinguono dalle scienze fisiche e da tutte le altre scienze in generale; poichè questa *apriorità* delle proposizioni matematiche non deve intendersi in un senso che escluda l'origine empirica o induttiva delle premesse di queste scienze (pag. 348).

Ma io credo che questa distinzione, che permette di essere *apriorista* ed empirista ad un tempo, non introduca nessun vantaggio positivo nella terminologia. Più tosto mi pare che dia luogo ad una grave confusione di linguaggio troppo magramente compensata dall'utilità di poter adoperare logicamente il vecchio termine *a priori*.

Digitized by Google

stenza oggettiva intesa in questo senso, per la ragione che molte volte il fatto affermato nel giudizio non è l'esistenza sia di oggetti reali sia di rappresentazioni nostre di oggetti possibili, ma è che tra certe cose (realmente esistenti o semplicemente rappresentabili) vi hanno dei rapporti determinati di somiglianza, come distingue il Guastella (pag. 399).

È facile osservare che anche in questi casi si tratta sempre dell'esistenza d'una relazione comparativa la quale però non c'impedisce di parlare di giudizî esistenziali in un certo senso. Infatti non si parla, in tutti questi casi, di rapporti che sono o non sono? Non si tratta di affermare che certi enti (logici o matematici) possono trovarsi in certi rapporti determinati di posizione, e di negare, al tempo stesso, che altri enti della stessa specie possono trovarsi negli stessi rapporti?

5. È fondandoci su questa innegabile esistenza di rapporti a cui daremo il semplice nome di esistenza relativa (o comparativa) per distinguerla dall'esistenza oggettiva la quale è duplice: reale o concreta e ideale o astratta, che noi intendiamo di poter ammettere rigorosamente che tutti i postulati in genere enunciano delle verità esistenziali. Per questa via non siamo punto condotti a misconoscere il carattere delle affermazioni comparative, giacchè se è vero che noi non affermiamo mai un fenomeno isolatamente, ma sempre in congiunzione o rapporto con altri fenomeni, è altrettanto vero che noi non affermiamo mai un rapporto isolatamente, ma sempre in virtù di quei termini o fenomeni o oggetti (siano reali o ideali) senza cui il rapporto medesimo non potrebbe affatto essere concepibile. È giocoforza pertanto ammettere l'esistenza dei termini

Digitized by Google

(esistenza oggettiva reale o ideale) se si ammette l'esistenza dei rapporti (esistenza relativa).

Ben lungi dunque dal ritenere che il carattere comparativo degli assiomi delle scienze astratte sia inconciliabile col loro carattere esistenziale, noi ci limiteremo soltanto a distinguere esattamente — caso per caso — l'esistenza relativa dall'esistenza oggettiva, e l'esistenza oggettiva reale o concreta dall'esistenza oggettiva ideale o astratta, con notevole vantaggio del rigore e della semplicità.

6. Ciò premesso passiamo agli assiomi logici.

Ricordando che si dicono primitive le idee di cui la definizione simbolica o nominale o abbreviativa fa difetto e che le proposizioni primitive o assiomi non fanno altro che esplicare — col linguaggio ordinario — le proprietà più semplici delle idee primitive (1), riesce possibile riconoscere — in linea generale — che la posizione delle idee primitive, e, in modo particolare, che il numero delle proposizioni primitive è imposto dal numero delle proprietà delle idee primitive medesime.

Da ciò risulta che, siccome le idee primitive della Logica sono due: idea e relazione, le quali si riducono poi a queste altre: essere e relazione (2), così gli assiomi logici possono distinguersi nelle due categorie seguenti:

1ª assiomi logici dell'idea o dell'essere;

2ª assiomi logici della relazione o del divenire.

Nella prima categoria poniamo, come fondamentale, il principio dell'identità (ciò che è è), (a = a), il quale

(1) Definizioni in sè stesse o di terza specie, secondo la divisione del Burali-Forti.

(2) Cfr. Parte I, Cap. IV.

Digitized by Google

consiste nell'affermare e riconoscere ad un tempo la natura e le medesimezza d'una cosa (così universale come particolare) con sè stessa; e presuppone appunto il concetto universale dell'essere (l'essere è l'essere).

Il principio di contraddizione non è che la forma negativa del principio d'identità, e non esige quindi una posizione speciale.

Nella seconda categoria poniamo, come fondamentale, il principio della conseguenza modale (ciò che vale in universale vale anche in particolare), il quale mostrando la relazione necessaria tra l'universale e il particolare e indicando che dato un fatto noi possiamo inferirne un altro, serve di fondamento a tutti i nostri raziocinî e presuppone appunto il concetto universale della relazione o del divenire. È noto che tutte le operazioni dell'intelligenza sono fondate sopra questi principî i quali riguardano direttamente la ragione, e che da essi fannosi derivare tutte le umane conoscenze.

Questi principî — più poche altre verità assiomatiche particolari, egualmente evidenti per sè stesse, ciascuna delle quali enuncia una proprietà caratteristica delle idee logiche primitive, sulle quali non è ora il caso d'insistere — formano il sistema fondamentale delle proposizioni primitive da cui si deducono tutte le altre proposizioni della Logica.

7. Veniamo agli *assiomi matematici.*

Siccome le idee primitive dell'Aritmetica sono le seguenti: numero e successione; quelle della Geometria: punto e moto; e tutte si riducono ancora giustamente a queste altre: essere e divenire; ne risulta che i giudizî primitivi matematici possono essere divisi in due categorie:

Digitized by Google

1ª assiomi aritmetici:
a) del numero o dell'essere;
b) della successione o del divenire;
2ª assiomi geometrici:
a) del punto o dell'essere;
b) del moto o del divenire.

Poichè i matematici moderni, con una serie crescente di semplificazioni, si sono già liberati così dei concetti inutili e mal determinati, come della maggior parte dei postulati non indipendenti effettivamente cioè irreducibili fra loro; noi non cercheremo, nè di rifare l'analisi matematica delle proposizioni in generale, che fu già trattata con procedimenti scientifici rigorosi, nè di passare in rassegna le proposizioni che dai più competenti si dànno come primitive.

Per un più ampio studio sopra i postulati del numero, il lettore può ricorrere direttamente ai chiari elenchi del Dedekind, che furono poscia analizzati e perfezionati notevolmente dal Peano con lo strumento della Logica algebrica; e per quanto riguarda i postulati della Geometria può ricorrere pure direttamente agli elenchi del Pasch, del Peano e del Pieri, ai quali si deve in sostanza l'analisi, la posizione e la riduzione più rigorosa delle proposizioni considerate attualmente come primitive.

Qui mi limiterò ad osservare che uno stesso sistema di assiomi è comune all'Aritmetica ed alla Geometria.

Agli assiomi sull'essere matematico (numero, punto, considerati ora come classi ora come individuo) tengono dietro gli assiomi sul divenire (successione, moto) in cui si risolve il principio d'inferenza matematica (successione di numero a numero, o moto di punto in punto) analogamente a quanto si può dire per il principio logico della relazione.

Digitized by Google

8. Passando ora agli *assiomi fisici,* e premesso che le idee primitive della Fisica si riducono alle seguenti: massa o spazio, moto o tempo, riducibili alla loro volta nelle altre due: essere e divenire, si arriva necessariamente a dividere gli assiomi fisici in due categorie:

1ª assiomi della massa, o dello spazio, o dell'essere;

2ª assiomi del moto, o del tempo, o del divenire.

Le verità assiomatiche speciali e relative alle proprietà caratteristiche di queste due categorie di idee primitive non hanno neppur bisogno di essere mentovate nel presente campo, bastandoci di riconoscere che esse devono essere analoghe a quelle corrispondenti, riferite nei campi della Logica e della Matematica.

9. Intesa ed applicata in questo modo la classazione degli assiomi logici, matematici e fisici, parrebbe risolta ogni controversia. Però le distinzioni che furono rese necessarie dai caratteri che svolgonsi diversamente, secondo che riguardano i fatti astratti della Logica e della Matematica e quelli astratti-concreti della Fisica, fanno risorgere alcune questioni che non sono estranee all'argomento di cui c'intratteniamo. Se si riconosce pressochè da tutti il carattere puramente razionale degli assiomi della prima parte delle scienze astratte, cioè della Logica; per contrario intorno alla seconda parte cioè della Matematica, il Comte sostiene che nelle Matematiche la parte puramente astratta e razionale è la scienza dei numeri (Aritmetica e Algebra), mentre la Geometria e la Meccanica razionale hanno un vero carattere concreto e naturale (Lez. 3ª, t. I). La Geometria — egli dice — deve essere considerata come una vera scienza naturale, solamente più semplice e per conseguenza molto più perfetta di qualche

Digitized by Google

altra... (Lez. 10ª, t. I). Altri notando che la Fisica appartiene alla divisione delle scienze astratte-concrete, vuole riscontrare in essa la sede di un invincibile dissidio tra i giudizî primitivi di carattere concreto e sperimentale e i giudizî primitivi di carattere astratto e razionale. Bisogna dunque considerare se e come i fatti smentiscano queste pretese.

10. E dapprima occupiamoci dell'affermazione del carattere esclusivamente concreto della Geometria e a più forte ragione della Fisica.

A questo riguardo, senza sforzarci di negare l'affermazione del carattere concreto di queste scienze, possiamo per intanto limitarci a riconoscere francamente che tanto la Geometria quanto la Fisica matematica e Meccanica razionale hanno un innegabile carattere astratto e puramente razionale. Ciò è provato ben chiaramente dal fatto che tutte quante le proposizioni della Geometria, della Fisica matematica e della Meccanica razionale si deducono in virtù del solo ragionamento da un piccolissimo numero di idee primitive ottenute, non già nel senso delle scienze concrete e naturali, cioè coll'osservazione delle cose esterne e naturali, ma coll'osservazione delle pure idee, vale a dire appunto nel senso delle scienze astratte e razionali, cioè della Logica e dell'Aritmetica.

Le analisi dell'idee primitive, compiute nella prima parte di questo saggio, riducono dunque a zero il tentativo di negare il carattere astratto e razionale così alla Logica e all'Aritmetica, come alla Geometria e alla Fisica.

Che si possa anche parlare d'un carattere concreto e naturale sia per la Geometria ipoteticamente, sia per la Fisica senza ombra di dubbio, non è il caso nè

Digitized by Google

di affermare nè di negare, quando si tratta di decidere intorno al carattere razionale della Logica, della Matematica e della Fisica, il quale ad ogni costo rimane. Ecco pertanto che cosa dicono i fatti, in primo luogo.

11. In secondo luogo se vogliamo discendere all'esame del carattere concreto e naturale, non solo della Geometria — ove la questione è difficilissima — ma della Fisica — ove l'affermazione è ovvia — per essere giusti conviene riconoscere che passando dalla Logica alla Fisica, noi passiamo dalle proprietà e dai rapporti sperimentati fra le idee, alle proprietà ed ai rapporti sperimentati fra gli oggetti. Usciamo dal campo soggettivo della nostra mente per entrare nel campo oggettivo della natura esterna. Dall'esistenza e dalla comparazione ideale passiamo all'esistenza ed alla comparazione reale. Questa diversità del resto è significata ben chiaramente dalla Fisica stessa, la quale dividendosi nelle due parti: Fisica sperimentale e Fisica matematica, ci fa comprendere assai bene che la prima sta alla seconda come l'esistenza e la comparazione reale stanno all'esistenza ed alla comparazione ideale.

Molto esatto è quindi l'asserire che la Fisica sperimentale ha un carattere filosofico essenzialmente fisico, fenomenale, concreto; mentre quello della Fisica matematica e della Meccanica razionale è puramente logico, razionale, astratto.

Infatti la parte concreta di ogni quistione fisica è necessariamente fondata sulla considerazione del mondo esteriore e non si risolve affatto in un semplice seguito di operazioni intellettuali. La parte astratta al contrario quando essa è stata dapprima esattamente separata dall'altra, non consiste più che in una serie di operazioni razionali più o meno prolungata.

Digitized by Google

Ma queste considerazioni ci permettono solo di concludere che non si può risolvere il problema del carattere astratto o concreto, razionale o naturale degli assiomi fisici, nè — a dir vero — alcun altro problema di questo genere, con una formula che stabilisca *a priori* e si pretenda estendere a tutti gli assiomi delle scienze. Sotto quest'aspetto le esagerazioni della scuola razionalista valgono quelle degli empiristi. Bisogna studiare i fatti senza idee preconcette e raccogliere i documenti per la conclusione che deve essere imposta solo da essi. Date, da un lato, l'esistenza degli oggetti fisici e dei loro rapporti (carattere concreto e naturale) e dall'altro quella delle idee e dei loro rapporti (carattere astratto e ideale), conviene riconoscere che nella considerazione generale della Fisica i due caratteri ideale e naturale, astratto e concreto, sono simultanei.

Tutt'al più si può dire che la considerazione della Fisica sperimentale, cioè dell'osservazione dei fatti concreti e naturali, ha preceduto — ma non sempre — la considerazione della Fisica matematica, cioè dell'osservazione dei fatti astratti e razionali. Di più: compiute indipendentemente le due osservazioni e riconosciuto che il carattere delle conoscenze reali si accorda col carattere delle conoscenze razionali, cioè che le idee e i rapporti fra le idee corrispondono agli oggetti ed ai rapporti fra gli oggetti, e prodotta la verificazione sperimentale, si può conchiudere che è possibile sostituire, nelle ricerche fisiche, l'osservazione delle idee all'osservazione delle cose e reciprocamente.

12. Ma prima d'aver dimostrato la corrispondenza fra il pensiero e la realtà non v'è alcun caso in cui

Digitized by Google

l'osservazione delle idee possa sostituirsi, con sicurezza, a quella delle cose.

Nulla di più curioso poi delle contraddizioni a cui si sono esposte — sopra questo argomento — le due teorie rivali: l'*apriorista* o intuizionista e l'empirista, ognuna delle quali dopo d'aver preconizzata e decantata la prossima scomparsa della rivale in nome della Logica e della realtà si vede oramai costretta a riconoscere che entrambe possono e devono conciliarsi fra loro, così in nome dell'idea come in nome dei fatti.

13. Resta una questione della massima importanza: la necessità e la contingenza degli assiomi logici, matematici e fisici.

Ora finchè rimaniamo nell'àmbito della Logica la necessità di ammettere delle proposizioni primitive necessarie è evidente. Infatti noi non potremo mai dispensarci dalla necessità di ammettere delle affermazioni logiche come necessarie finchè non potremo sottrarci alla necessità pratica di non cadere in contraddizione logica con noi medesimi. Poniamo dunque come un fatto indiscutibile la necessità di ammettere alcune verità logiche come necessarie. Ma questo riconoscimento non pregiudica la questione dell'origine storica di questa attuale necessità. Nè si dica che il carattere di necessità che appartiene alle scienze razionali per eccellenza è solo legato col fatto che questa scienza esclude sia dalle sue premesse sia dai suoi risultati qualsiasi proposizione che postuli l'esistenza oggettiva — la quale non può essere che contingente e sperimentale — e non v'include altre verità che dei rapporti ideali comparativi.

Prima di tutto dobbiamo ammettere la necessità attuale di non contraddirci, a cui non possiamo rinun-

Digitized by Google

ciare se pure non vogliamo rinunziare all'uso del pensiero.

Che le scienze razionali poi possano costruire le loro proposizioni servendosi della pura osservazione delle idee ed escludendo rigorosamente l'osservazione delle cose, è una circostanza di valore secondario. Se non sapessimo già che queste costruzioni prettamente ideali sono possibili, in virtù delle nostre riduzioni analitiche delle idee logiche primitive, potremmo anche concederlo facilmente in via d'ipotesi. Giacchè quest'ipotesi è perfettamente conciliabile col fatto della necessità logica accennata.

Intorno poi alle questioni dell'intuizionismo o *apriorismo* e dell'empirismo (sia inteso alla maniera del Mill e del Bain, sia a quella dello Spencer) non possiamo avere dinnanzi che delle ipotesi, le quali — a seconda del numero delle prove indirette — possono offrirci minore o maggior grado di accettabilità. Ma in ogni caso conviene rammentare che così la dogmatica pretesa della conoscenza del passato destituita di prove, come la previsione puramente profetica dell'avvenire sorpassano la scienza vera e devono condannarsi.

In conclusione, si può dire che in Logica sono necessarie tutte quelle proposizioni primitive che importa ritenere come tali, nell'unico intento di schivare la contraddizione, e sono per contro contingenti tutte quelle proposizioni la cui negazione logica è possibile. Questa conclusione non risolve nulla, ma si limita a riconoscere un fatto, fuori di ogni controversia logica.

14. Ma la lotta vera si svolge tra l'*apriorismo* o intuizionismo da un lato e l'empirismo dall'altro nell'àmbito — pur sempre astratto e razionale — della Matematica e in modo particolare della Geometria. I

Digitized by Google

momenti più notevoli di questa lotta saranno indicati nel rapido sunto della storia degli assiomi geometrici che aggiungeremo fra poco. Qui gioverà solo esaminare un avvenimento che sembra capace di risolvere la lite in modo definitivo. Alludo alla comparsa delle speculazioni della Metageometria. Secondo i metageometri il nostro spazio, cioè lo spazio in cui realmente viviamo, è uno spazio di curvatura costante, cioè ha un coefficiente di curvatura costante; ma il valore di questo spazio non può essere provato che per misure dirette. Ne segue che, come la possibilità dello spostamento delle figure, cioè la costanza nel coefficiente di curvatura determina una nozione generica nello spazio, così il valore di questo coefficiente di curvatura determina questo o quello fra gli spazî possibili.

Ora noi abbiamo tutte le migliori ragioni per credere che il valore di questo coefficiente nel nostro spazio è zero, ossia che il nostro spazio è piano, ma non abbiamo neanche una ragione per negare che possano anche esistere degli spazi curvi, per esempio con valori differenti del coefficiente di curvatura, sia positivi (spazio sferico), sia negativi (spazio pseudo-sferico).

Non è mio intendimento di esporre ora le vicende della lotta tra i geometri euclidei e meteuclidei; qui voglio solo riassumere in parte gli argomenti scientifici che vengono prevalentemente adoperati per combattere la natura necessaria delle nozioni geometriche comuni. Dalle osservazioni riferite si può già concepire la possibilità di ammettere che ciascuno di quegli spazî possibili può formare l'oggetto di un sistema differente di Geometria.

Dalla possibilità di costruire una classificazione dei sistemi geometrici differenti dal nostro se n'è concluso espressamente che le nostre nozioni geometriche sono

Digitized by Google

contingenti ed empiriche (nello stesso senso in cui è empirica una verità di fatto). " Gli assiomi — dice Helmholtz — su cui il nostro sistema geometrico è basato, non sono delle verità necessarie, dipendenti solamente dalle leggi irrefragabili del nostro intendimento. Al contrario, diversi sistemi di geometria possono svilupparsi analiticamente con una consistenza analogica perfetta.

" I nostri assiomi sono in realtà l'espressione scientifica d'un fatto d'esperienza generalissimo, cioè che nel nostro spazio i corpi possono muoversi liberamente senza alterazioni della loro forma ".

Il nostro spazio è — sempre secondo Helmholtz — una varietà a tre dimensioni, congruente rapporto a sè stessa e piana. Ciascuna di queste tre proprietà dello spazio viene definita da certi assiomi o postulati, sull'insieme dei quali è fondata la geometria ordinaria o euclidea.

Molte delle speculazioni metageometriche hanno un carattere polemico, contro il carattere necessario degli assiomi geometrici e in tutti — più o meno — campeggia la pretesa di combattere in nome della scienza.

15. *Colligamus spicas.*

Queste speculazioni dei Metageometri hanno provato la natura empirica e contingente delle nozioni geometriche ordinarie?

Il Tannery sembra ammetterlo. " Il concetto dello spazio — egli dice — è formato dall'associazione di nozioni distinte, e quest'associazione non è necessaria. Ogni proposizione sullo spazio è dunque contingente ". E di quest'avviso sono molti matematici di grandissimo valore. Nondimeno le obbiezioni sono ancora numerosissime e dominanti. Il Guastella, che

Digitized by Google

ha riassunto molto chiaramente una gran parte di queste intricate ragioni, assumendo una posizione negativa di fronte alla pretesa della contingenza delle nozioni geometriche provata dalla Metageometria, conclude:

" Quello che simili opinioni perdono di vista è la natura comparativa, e non esistenziale, delle nostre proposizioni sullo spazio; di più esse trattano le astrazioni come fossero delle cose reali o almeno degli oggetti distinti del nostro pensiero. Si suppone che lo spazio e le sue forme siano dati al geometra come dei fenomeni d'un altro ordine son dati al fisico o al naturalista; che la geometria abbia per oggetto di trovare le leggi dei *fenomeni geometrici* nel senso stesso in cui le scienze fisiche hanno per oggetto di trovare le leggi dei fenomeni fisici. Si parla come se lo scopo della Geometria fosse di farci conoscere la natura dello spazio in cui viviamo, le proprietà e le costituzioni di questo spazio e delle sue forme determinate, il loro modo di esistere. Come *a priori* qualsiasi ordine tra i fenomeni della natura sarebbe supponibile, ma l'osservazione sola può decidere a quale di queste supposizioni sia conforme il corso reale degli avvenimenti, così si pretende che noi possiamo formarci *a priori* la nozione di differenti spazî o sistemi geometrici possibili, ma la sola osservazione decide a quale di queste possibilità sia conforme il nostro sistema geometrico o lo spazio reale. Un ordine di osservazioni ci fa conoscere che il nostro è uno spazio a curvatura costante; un altro ordine di osservazioni che esso non è uno spazio sferico; un altro infine che esso non è nemmeno pseudo-sferico, ma piano. Ciascuno di questi risultati è espresso da un assioma geometrico; gli assiomi geometrici hanno dunque per oggetto di stabilire una determinazione dello spazio,

Digitized by Google

un suo modo di comportarsi, una legge fondamentale dei suoi *fenomeni*.

" Ciò che si deve rigettare in queste asserzioni non è semplicemente la grossolana realizzazione dell'astrazione " lo spazio „ che esse presentano immediatamente... Ma siffatte proposizioni misconoscono il vero significato degli assiomi e dei teoremi della Geometria, perchè tendono a riguardarli come giudizî esistenziali, che ci istruiscono sulle qualità e la natura delle forme determinate che si trovano nel mondo della nostra esperienza „ (1).

16. Ora noi abbiamo già osservato, in più di un caso, che la natura comparativa delle nostre proposizioni razionali è perfettamente conciliabile con la natura esistenziale della medesima — ben inteso allorquando si ammetta, come qui è il caso di fare, l'esistenza astratta delle idee e dei loro rapporti, cioè esistenza ideale e relativa o comparativa.

Dunque colle riferite opinioni non si tratterebbe già di perdere di vista la differenza tra la natura comparativa e l'esistenziale delle nostre nozioni geometriche, ma di ammetterle tutte e due. Di più, se è vero che questo modo di vedere ci costringe a trattare le astrazioni come fossero delle cose reali o almeno degli oggetti distinti del nostro pensiero, io non esito a ritenere che questa grossolana realizzazione dell'astrazione " lo spazio „, ben lungi dall'essere un imperdonabile abuso, è anzi una vera condizione di progresso scientifico imposta dall'esperienza.

---

(1) C. Guastella, op. cit., pagg. 417-418-419.

Digitized by Google

17. Qui ci troviamo apparentemente di fronte a una contraddizione.

Di fatto potrebbe sembrare — a prima giunta — che noi riuscissimo a scoprire la verità appunto allorquando prendiamo una cosa per un'altra, cioè quando trattiamo le astrazioni come fossero delle cose reali. Però occorre guardarci dalle affermazioni precipitose e incomposte. Procedendo diversamente, la vittoria può essere facile a parole ma priva di risultati nel fatto.

Che sia un abuso prendere le astrazioni *come se* fossero delle cose reali, è presto detto. Si noti intanto che quando noi vogliamo analizzare accuratamente tutte le idee delle quali ci serviamo — verbigrazia — in Logica o in Matematica o in Meccanica razionale, niuno altro artifizio ci sembra più sicuro che il simbolismo logico o matematico, per il quale tutte le nostre astrazioni sono considerate come se fossero enti o cose reali, e rappresentate con segni che hanno un significato ben determinato ed oggettivo.

Solo operando bene — vale a dire — solo prendendo rigorosamente ogni nostra astrazione come se fosse un ente, cioè un oggetto reale ed invariabile, noi siamo in grado di arrivare a dei risultati soddisfacenti.

È noto che tutto il merito dell'attuale Logica matematica spetta incontestabilmente al vasto genio di quel matematico e filosofo che pel primo concepì il grandioso progetto di creare una scrittura universale per cui ogni idea composta potesse esprimersi per mezzo di idee semplici, rappresentate ciascuna da un *segno* ideografico speciale.

Bisognerebbe quindi — per non ingenerare confusione ed equivoci — distinguere caso per caso, quando

Digitized by Google

si può fare la realizzazione delle astrazioni e quando no, almeno per i bisogni della scienza.

18. Ma il Guastella - - a cui non è sfuggita questa obbiezione importantissima — crede di poter rispondere vittoriosamente col rilevare che " se è innegabile il carattere simbolico della Matematica e del calcolo in generale, però questo processo non deve far dimenticare che ai simboli corrispondono delle cose reali o possibili e che ai rapporti fra questi simboli corrispondono dei rapporti fra queste cose „ (pp. 424-425).

" Questo processo sarebbe perfettamente vano — egli aggiunge — se ai simboli non si potessero sostituire delle percezioni attuali o possibili. Ora tutte le speculazioni metempiriche o metamatematiche si trovano appunto in questo caso, sono cioè irrappresentabili intuitivamente; dunque tutte le loro combinazioni simboliche a cui non corrisponde intuizione alcuna, sono paragonabili ad un effetto bancario che nessuno vorrà accettare in pagamento. Un banchiere potrebbe averne piene le casse che non sarebbe più ricco d'un centesimo „ (p. 425).

Al fondo, si dice, tutte le nozioni della Geometria ordinaria sono rappresentabili intuitivamente, dunque sono sostituibili giustamente con l'uso meccanico dei simboli; per contro, tutte le nozioni della Geometria straordinaria sono irrappresentabili intuitivamente, dunque il procedimento simbolico in questo caso è perfettamente vano.

19. Ma è vero che tutto il cardine della questione si riduce alla rappresentabilità degli spazî geometrici in discussione?

Io non lo credo. Credo — per contro — che sia il

Digitized by Google

caso di porre una grande distinzione tra la rappresentabilità logica e la possibilità logica d'una nozione.

La prima, anzi, non mi sembra altro che un caso speciale della seconda.

20. La nostra vera tesi è quindi la seguente:

Le nozioni metageometriche per essere logicamente possibili non hanno bisogno di essere logicamente rappresentabili.

Cerchiamo delle buone e valide ragioni a sua difesa. Un po' di riflessione ci mostrerà che l'ammettere l'esistenza possibile o la possibilità di nozioni non suscettibili di rappresentazione intuitiva ci costringe ad accettare — almeno in parte — la tesi del concettualismo secondo cui a un termine generale corrisponde, non delle rappresentazioni particolari — come pretende il nominalismo — ma una nozione generale o idea astratta. Questo equivale anche a domandarci semplicemente: esistono o no delle idee astratte?

Da ciò segue che prima di pronunciarci intorno alla questione speciale della possibilità delle nozioni metageometriche, non suscettibili di rappresentazione intuitiva, dobbiamo esaminare la questione generale della possibilità delle idee astratte.

L'esistenza delle idee astratte è fieramente combattuta dal nominalismo intransigente con un gruppo di ragioni di cui mi limito a riferire le principali.

Anzitutto — seguendo il Berkeley — si fa un appello diretto alla coscienza, affermando che ci è impossibile, esaminando noi stessi, di sorprenderci nell'atto di avere un'idea astratta. " Noi possiamo astrarre in un senso — avverte il Guastella, il quale da rigido nominalista cerca di demolire completamente la teoria dei concetti — in quanto possiamo pensare, separa-

Digitized by Google

tamente, delle cose o dei fenomeni che nella realtà sono inseparabili. Noi possiamo concepire isolatamente delle proprietà d'uno stesso oggetto, ma che noi percepiamo per dei sensi differenti „ (pag. 8).

" Quando pensiamo a qualche argomento astratto non ci accorgiamo di più che delle rappresentazioni di alcuni segni o termini generali che non sono essi stessi se non delle imagini particolari di un certo ordine di sensazioni „ (pag. 9).

Nel ragionamento astratto i segni delle idee tengono il posto delle idee medesime.

Noi non possiamo concepire altrimenti la possibilità del pensiero, se non vedendo nelle nostre idee delle rappresentazioni, delle copie esatte delle cose stesse: se il pensiero non rispecchiasse le cose stesse, in che potrebbe consistere la verità, questa conformità tra il pensiero e le cose? Le idee astratte non potrebbero essere dunque che delle rappresentazioni o delle imagini; e non essendovi che degli oggetti concreti non potrebbero che essere delle rappresentazioni degli oggetti concreti. Ma non delle rappresentazioni totali o intere, poichè in questo caso sarebbero idee concrete; dunque rappresentazioni parziali, cioè parti o elementi di rappresentazioni concrete (pag. 13).

" Pensiero, rappresentazione, immagine sono dei termini equivalenti „.

" Qual'è la grande inconcepibilità di un'astrazione realizzata? È di supporre alcun che di reale che non è una cosa determinata — mentre tutto ciò che esiste noi non possiamo concepirlo che come assolutamente determinato „ (pag. 14).

" Finalmente si domanda ai partigiani delle idee astratte se le proposizioni della Geometria indicano dei rapporti fra gli oggetti reali. Se sì, e allora o questi

Digitized by Google

oggetti reali sono dei punti e delle linee esistenti nelle cose, il che vale realizzare delle astrazioni; o se nella realtà non vi hanno veramente dei punti e delle linee, come comprenderemo noi che le proposizioni della Geometria abbiano un oggetto e una applicazione reale?

" Il vero si è che le proposizioni geometriche si applicano non ad astrazioni irrealizzabili e inconcepibili, ma ad oggetti reali o possibili dei nostri sensi; non a punti e linee, ma a superficie e corpi e loro si applicano nella maniera più rigorosa ".

Tali sono le obbiezioni più gravi contro la teoria dei concetti (1).

21. Ma da questi assalti la teoria dei concetti non resta punto schiacciata. Anzi appare ancor più consigliabile un beninteso semi-concettualismo quasi a modo della scuola inglese del Mill, del Bain e dello Spencer.

Invero l'appello all'osservazione interiore — in cui consiste l'argomentazione di Berkeley, quantunque trattandosi di un fatto della coscienza non possa esservi una prova migliore — può lasciare gravissimi dubbî, quando si rifletta che l'osservazione interiore è un metodo fallace o almeno insufficiente.

Di più, si potrebbe asserire che i fatti mentali si riducono tutti a percezioni concrete? Tutti sappiamo che vi ha inoltre, nell'intelligenza, un altro ordine di

(1) Le obbiezioni minori si aggirano sull'origine delle idee astratte considerate come concezioni isolate separate e parziali; — sulla realizzazione delle astrazioni; — sulla comparsa delle idee astratte, per sè stesse concepite come un fatto essenzialmente nuovo che costituirebbe una soluzione di continuità incompatibile col principio dell'evoluzione e coll'unità delle leggi dello spirito; — sull'anima che non intende mai senza immagini, secondo il detto d'Aristotele, ecc.

Digitized by Google

fatti, cioè la percezione dei rapporti che lo spirito scopre fra i fenomeni paragonandoli fra loro.

Questo fatto è riconosciuto francamente dal Guastella e pure fa meraviglia che non abbia valso a fargli mutare parere. Egli stesso confessa: " Ebbene, tutti sappiamo in che consista un rapporto di somiglianza tra due cose; ma chi potrebbe rappresentarsi il fatto interiore in cui consiste la percezione d'un rapporto di somiglianza? "

Per noi questo riconoscimento ha una gravità eccezionale perchè ci porta ad affermare che se la *dottrina dei concetti* conduce inevitabilmente alla realizzazione delle astrazioni, e questo si reputa un gran male mentre non è; all'incontro la *dottrina dei nomi* conduce inevitabilmente alla realizzazione esclusiva della presentazione delle idee fatta dal punto di vista ottico, donde segue un equivoco imperdonabile.

22. Fermiamoci un po' a considerare l'assurdità parziale inerente all'affermazione esclusiva delle rappresentazioni cioè delle idee con immagine e nell'immagine, vale a dire delle nozioni a tipo visuale.

Il nominalismo non è che il metodo di assegnare puntualmente a tutte le idee il carattere rappresentativo delle idee concrete e particolari affermando che di astratto e di generale non vi hanno che dei nomi.

Ma ciò non basta per persuaderci della verità delle sue pretese, perchè questa *teoria nominalista* è basata evidentemente sopra un sofisma. *È un' illusione ottica naturale*, generata dall'abitudine mentale dell'intuire cioè di *vedere* graficamente le nozioni per cui la concepibilità — dico meglio la possibilità — delle nozioni si scambia metafisicamente con la loro visibilità. La supposizione della negazione delle idee astratte è nata

Digitized by Google

dall'abitudine indispensabile di vedere, cioè *di renderci conto del pensiero per la sua espressione ottica o rappresentativa, traducendo in fatti di percezione visiva ogni fatto di pensiero.* Noi ci abituiamo così a credere che vi abbia una corrispondenza e un'equivalenza esatta fra l'*idea* e la *visione.* Ad ogni idea facciamo corrispondere un'immagine particolare; e quando la corrispondenza *appare* cioè si *vede* impossibile (o non si vede), siamo trascinati a negare l'esistenza dell'*idea* o *concetto.* Così quando vogliamo renderci conto del pensiero in sè stesso per conoscere la sua natura e il suo meccanismo, noi siamo trascinati dall'abitudine di prendere per oggetto della nostra considerazione non direttamente il fatto del pensiero stesso, ma la sua *espressione visuale* tradotta — dirò così — in oggetto della nostra *vista* mentale, e di credere — per tale scambio — che i pensieri e le immagini rappresentative si corrispondono perfettamente.

Di questa maniera nasce la persuasione che l'equivalente esatto di ogni idea sia una rappresentazione: le idee astratte non sono rappresentabili, dunque non esistono nella nostra intelligenza. Ecco le conclusioni del nominalismo puro.

Questo è l'errore comune a tutti coloro che *pensano esclusivamente con gli occhi* e credono che vi sia una connessione necessaria fra le idee e le immagini visive. Ora quali sono le ragioni positive per farci credere che le idee e la loro espressione visiva sono inseparabilmente legate fra loro in un essere unico? Non sarebbe più cauto il ritenere che certe idee — già impropriamente così chiamate con un termine che indica una visione ed ha quindi un valore di suggestione ottica irresistibile — diremo meglio certe nozioni, sono legate, forse in ragione della loro origine, con

Digitized by Google

un'espressione visiva speciale, altre sono congiunte con altre espressioni sensibili differenti forse, per la stessa ragione; altre poi sono legate con certe espressioni puramente comparative ed analitiche da riuscire del tutto irrappresentabili mediante una forma estetica determinata?

Chi afferma la verità d'un solo tipo sensibile è vittima d'una pura comparazione metaforica e ciò per effetto della tendenza che ha lo spirito umano di credere *necessarie* quelle connessioni che scorge tra i fatti che gli sono estremamente famigliari.

23. A piena dimostrazione di quest'asserto, aggiungasi un ultimo argomento.

Fu detto che ai simboli della Geometria ordinaria corrispondono cose reali e percezioni rappresentabili, mentre ciò non avviene per i simboli della Metageometria.

Ora questo sta bene, ma non è vero che in parte.

Infatti di quante prette astrazioni non si occupa l'Aritmetica, l'Algebra, la Geometria, di cui sarebbe affatto impossibile indicare l'espressione rappresentativa? Quali sono le cose reali e concrete che corrispondono ai simboli della Logica matematica, ad esempio? L'elenco delle idee adoperate nel *Formulario di matematica* non è che un elenco di termini astratti. Sopprimere le idee astratte, in questo caso, sarebbe sopprimere il rigore di queste scienze medesime. Pronunciare un'opinione qualunque sul contenuto rappresentativo di codesti concetti sarebbe puramente chimerico.

Passando ora alle nozioni geometriche, non sarebbe almeno lecito di accennare che la superficie pseudosferica di Beltrami è pur rappresentabile in certo qual

Digitized by Google

modo ricorrendo all'artificio della sfera rappresentativa la quale ha pur fatto affermare all'Helmholtz che noi perveniamo, di questa maniera, a *rappresentarci* lo spazio pseudo-sferico? Sarebbe della massima importanza il fare una lunga meditazione sopra questa famosa definizione di Helmholtz: " *Per l'espressione di rappresentarsi o di essere in grado di figurarsi ciò che avviene, io intendo la facoltà d'immaginare la serie intera delle espressioni sensoriali che si proverebbero in questo caso* ".

24. Ma noi possiamo sorvolare sopra questo argomento perchè non si tratta già ora di dimostrare se il mondo pseudo-sferico in ispecie o i mondi metageometrici in genere siano o non siano rappresentabili adeguatamente. Molto più c'interessa far comprendere chiaramente che la possibilità della Geometria ordinaria non si fonda nè sulla rappresentabilità delle sue nozioni (che sono anzi per la maggior parte irrappresentabili), nè sull'applicabilità reale (che si può verificare, come si verifica in parte, ma non è indispensabile). La verità è che se la corrispondenza tra le cose reali e le idee astratte in Geometria è possibile, anzi verificabile, tuttavia la costruzione geometrica eretta sulla pura *osservazione delle idee astratte* (Geometria razionale) è del tutto indipendente dalla costruzione geometrica erigibile sulla concreta *osservazione delle cose concrete* (Geometria fisica). Tutti questi fatti ci permettono dunque di concludere che le idee astratte in generale esistono e di esse si fa larghissimo e fecondissimo uso in tutte le scienze razionali.

25. Risolta la questione generale della possibilità delle idee astratte — nel senso che non tutte le

Digitized by Google

idee sono rappresentative — passiamo alla questione speciale della possibilità delle nozioni metageometriche.

Dopo d'aver dimostrato che non si pensa unicamente per rappresentazioni concrete perchè esistono anche delle idee astratte non suscettibili di rappresentazione intuitiva, non possiamo esitare a riconoscere che l'irrappresentabilità delle nozioni metageometriche non costituisce un ostacolo alla loro logica pensabilità, cioè alla loro possibilità.

Se la Geometria ordinaria euclidea ha realmente luogo dentro il cerchio della nostra esperienza oggettiva non è necessario che questo si verifichi per la Metageometria, tanto più che la realizzazione concreta della Geometria fisica o sperimentale non ha niente a che fare con la realizzazione astratta, cioè colla costruzione della Geometria e delle Geometrie razionali.

Solo è il caso di distinguere varie specie di esperienza.

L'esperienza fisica è una sola.

Nel caso dell'osservazione reale del nostro spazio in cui viviamo, essa ha determinato in noi una nozione generica di spazio corrispondente alla costanza del nostro coefficiente di curvatura. Sopra questa nozione empirica generale, per l'accumulazione e l'associazione organica delle esperienze avitiche, s'è formato il sistema di Geometria euclideo, che è niente altro pertanto che *l'espressione scientifica della nostra osservazione empirica generale.*

È a questa nozione concreta e unica, imposta dai fatti, la quale si crede necessaria, ma non lo è, che vogliamo attribuire — come è giusto — il suo vero carattere empirico e contingente.

L'esperienza logica e razionale è invece molteplice. Essa ci afferma e ci prova " logicamente „ l'esistenza

Digitized by Google

di più spazî diversi, e ci costruisce differenti sistemi di Geometria, i quali tutti rispettano il fondamentale principio dell'identità, cioè dell'unica necessità logica ammissibile.

Noi siamo condotti così a riconoscere la verità di quanto abbiamo stabilito nella prima parte di questo saggio intorno alle svariate applicabilità dei due grandi principî:

1° della piena e mutua convertibilità di tutte le idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica;

2° della possibilità d'una spiegazione logica comune a tutte quante.

26. Chi ha seguìto attentamente le presenti ricerche può oramai capire senza difficoltà che la Matematica propriamente detta può, oltre al suo ordine, essere studiata e costruita dal doppio punto di vista logico e fisico.

Nel primo caso risulta una Matematica logica o astratta o razionale o analitica. È questa la Metamatematica propriamente detta che si divide opportunamente in Metaritmica e Metageometria. Nel secondo caso risulta una Matematica fisica o concreta o empirica o sintetica che dir si voglia. È questa la Matematica ordinaria pienamente realizzabile ed applicabile nel cerchio della nostra esperienza esterna — perchè suggerita da essa.

Lo stesso sdoppiamento avviene per la Logica propriamente detta, la quale studiata dal punto di vista matematico dà origine alla Logica matematica, e, dal punto di vista fisico, alla Logica sperimentale, discipline che potrebbero anche raccogliersi sotto la denominazione generica di Metalogica.

Digitized by Google

E la stessa cosa si ripete per la Fisica propriamente detta o Fisica sperimentale, la quale studiata dal punto di vista matematico dà origine alla Fisica matematica, e, dal punto di vista logico, alla Fisica razionale. La Meccanica razionale non sarebbe altro che una suprema complicazione della Fisica studiata dal punto di vista matematico e logico simultaneamente. Per amore di brevità mi limito ad avvertire che tutte queste nozioni astratte pure o miste presentano lo stesso ed unico carattere di necessità senza che sia necessario ammettere altrettante guise di necessità, tutte indipendenti tra loro, quante sono le verità assiomatiche corrispondenti.

27. Contrapponendo quindi la teoria di Kant: " È impossibile rappresentarci forme geometriche differenti; dunque le nozioni geometriche ordinarie sono necessarie „ a quella dei Metageometri: " È possibile rappresentarci forme geometriche differenti; dunque le nozioni geometriche ordinarie sono contingenti „, è facile oramai giudicare da che parte stia la verità.

Fra l'impossibilità affermata gratuitamente dal Kant e la possibilità provata sperimentalmente (parlo di esperienza logica — intendiamoci) dai Metageometri, voglio sperare che si tenga maggior conto dei serî sforzi di coloro che cercano di acquistare una conoscenza superiore a quella che può dare l'empirismo oggettivo e il dogmatismo. Astrazione fatta dalla necessità logica di non contraddirsi, quale è per tanto la necessità che resta negata dalle speculazioni dei Metageometri?

È ben strano l'osservare che questa necessità della Geometria ordinaria negata dai Metageometri è precisamente quella che si meriterebbe il nome di *necessità empirica,* se quest'espressione non fosse un'assurdità ed un incompatibile abuso di linguaggio.

Digitized by Google

Cade in conseguenza ogni ragione di dissidio tra l'*apriorismo* o intuizionismo da un lato e l'empirismo dall'altro, nell'àmbito della Geometria — giacchè ciò che forma l'oggetto di tutta la Geometria sono tanto delle cose reali concrete quanto delle idee astratte e ciò in modi affatto indipendenti gli uni dagli altri.

E così siamo sufficientemente edotti sul vero significato degli assiomi della Geometria — e possiamo ammettere che la rappresentabilità logica d'una nozione non è che un caso speciale della sua logica possibilità, e possiamo finalmente concludere che le nozioni metageometriche, per essere logicamente possibili, non hanno bisogno di essere logicamente rappresentabili, come si voleva dimostrare.

28. Passiamo alla considerazione della necessità nel campo degli assiomi fisici.

Qui la lite risorge sotto forme diverse.

Sta bene, si dice, che questi assiomi appartenendo ad una scienza che si ammette già per astratta-concreta, siano in parte astratti e razionali e quindi fondati su nozioni irrappresentabili intuitivamente e in parte concreti e sperimentali cioè fondati su idee rappresentabili intuitivamente, ma appunto per questo come può ancora ammettersi che essi non perdano il carattere d'universalità e di necessità?

E, da un lato, i razionalisti affermano che l'esperienza non può dare origine a proposizioni d'un'assoluta universalità e necessità, giacchè essa può insegnarci che dei fatti si sono trovati (nel passato) costantemente insieme, ma questa non è una ragione per credere che essi torneranno sempre e necessariamente a presentarsi insieme (nel futuro). La previsione fondata sull'analogia

Digitized by Google

dei casi passati non può essere che una congettura incerta.

Dall'altro rispondono gli empiristi: Il motivo logicamente sufficiente per fare la generalizzazione e l'anticipazione necessaria non manca. In fatti il duplice carattere dell'universalità e della necessità di un giudizio fisico si manifesta immediatamente se si bada che questo duplice carattere non consiste in altro che in un'unione inseparabile fra le idee.

29. È bene osservare che il tentativo di spiegare le verità fisiche necessarie per la forza dell'associazione empirica, porta logicamente al risultato di negare l'esistenza di verità necessarie. Ma almeno si riesce a comprendere che, essendosi determinata e organata dentro di noi — per effetto della ripetizione continua delle esperienze — una specie caratteristica e costante d'esperienza, ne risulta che la sua affermazione è attualmente necessaria e concepibile. Se noi volessimo rinunziare alla necessità e alla concepibilità di questo criterio imposto dall'esperienza dovremmo rinunziare all'uso stesso del nostro pensiero.

Se quindi non v'è alcuna ragione che ci sforzi di uscir fuori dal campo dell'attuale esperienza logica per costringerci ad accettare una necessità impossibile ad essere concepita, nonchè verificata, bisogna ammettere che la nostra conoscenza, quella cioè che le nostre facoltà attuali possono attingere, è completa, organica, vitale, intelligibile e quindi necessaria, sempre quando la s'intende unicamente come capace di farci evitare la contraddizione.

30. Da ciò risulta che non v'ha — secondo me — differenza alcuna, quanto alla necessità, fra la Lo-

Digitized by Google

gica pura e la Matematica pura, e quelle branche delle scienze fisiche le quali, o per l'intervento delle Matematiche pure (Fisica matematica) o per effetto di queste e della Logica pura (Meccanica razionale) sono diventate prettamente astratte o deduttive.

Nè a mio conforto invoco il semplice fatto della generale pensabilità di tutte le nozioni logiche, matematiche e fisiche rappresentabili o non rappresentabili intuitivamente, invoco bensì il fatto indiscutibile e luminosamente dimostrato che la Fisica matematica e la Meccanica razionale per quanto costruibili deduttivamente sopra un piccolissimo numero d'idee astratte — cioè indipendenti dall'esperienza fisica — sono capaci non di meno di svolgere un'infinità di teoremi sui casi anche più complessi di movimento; teoremi la cui esattezza è stata sempre confermata dall'esperienza fisica e sopratutto dall'accordo mirabile fra i movimenti degli astri, quali si sono studiati e previsti dalla Meccanica celeste.

Digitized by Google

CAPITOLO SECONDO

Interpretazione storica degli assiomi geometrici.

---

1. Non crediamo utile di occuparci d'una maniera particolare e distesa della storia di tutti gli assiomi delle scienze astratte ed astratte-concrete mentovate. Ci limiteremo, pertanto, a tracciare una succinta esposizione della storia dei soli assiomi geometrici, la quale, per la selva delle questioni e per la singolare precisione dei varî momenti, sembra più interessante d'ogni altra, e, da un certo punto di vista generalissimo, potrebbe anche servire di esempio a tutte le altre corrispondenti, dato e concesso che il tipo di ragionamento astratto sia sempre il medesimo, il che è vero, salvo le varianti non essenziali dipendenti dalla variata formalità.

I lavori su questo argomento sono poi già così ricchi e in gran parte così convincenti che il mio còmpito sembra ormai quasi soltanto quello di ordinare i risultati ottenuti per far vedere al lettore che questi si accordano coi risultati della nostra discussione.

Gli studî brillantissimi dei matematici moderni e le

Digitized by Google

dichiarazioni esatte ed esplicite di alcuni di essi, fra cui il Klein, il Russel, il Poincaré, il Calinon, il Lechalas, il Tannery, il Milhaud e il Couturat, che hanno trattato direttamente il problema degli assiomi matematici con riferenze che possono interessare gli studî filosofici, ci permettono di fare una classificazione precisa, circa l'interpretazione storica degli assiomi geometrici.

Ci appoggeremo in modo particolare al saggio del Russel, sopra i fondamenti della Geometria (1), che ha sollevato tanti commenti fra i pensatori di ogni scuola e tuttavia resta documento critico di rarissima competenza.

Ma per dare un riassunto speculativo delle varie interpretazioni critiche degli assiomi geometrici, crediamo bene di ordinare le opinioni differenti in tre periodi distinti; avvertendo che se questi periodi esistono veramente nella Storia, nella Storia però non esiste la loro sistemazione, giusta il pensiero di un grande filosofo italiano, Pietro Ceretti da Intra — che ha pur legato alla teoria della conoscenza matematica un'eredità non ancora abbastanza conosciuta ma profondamente geniale e feconda — *il tempo del sole non è il tempo dell'idea.*

2. Il primo periodo sostiene la necessità universale e *a priori* degli assiomi geometrici e porta:

1° come prova diretta — l'affermazione pura e semplice della necessità, la quale non ha altra prova diretta che la sua affermazione medesima;

2° come prove indirette:

a) l'impossibilità della prova empirica, basata

(1) BERTRAND A.-W. RUSSEL, *An essay on the foundations of Geometry*. Cambridge, University Press, 1897.

Digitized by Google

sulla vanità d'ogni tentativo compiuto finora allo scopo di provare sperimentalmente la natura del nostro spazio;

b) la contradditorietà della prova empirica medesima, basata sul fatto che è impossibile far qualunque prova empirica, senza ricorrere necessariamente a qualche assioma;

c) l'impossibilità di spiegare adeguatamente colla esperienza relativa ed inesatta, l'esattezza assoluta e perfetta delle figure geometriche;

d) l'ipoteticità d'ogni prova empirica possibile, basata sul fatto che, anche se si trovasse una prova empirica soddisfacente, questa proverebbe soltanto che è possibile trovare una rappresentazione o modello di un fatto, la cui necessità è già stata intuita precedentemente;

e) l'inutilità d'ogni prova empirica, basata sul fatto che nessuna esperienza potrà mai trovarsi in contraddizione sia col postulato di Euclide sia col postulato di Lobatchewsky.

In conclusione, questo periodo dice: È impossibile provare che gli assiomi geometrici sono empirici, dunque essi sono indipendenti da ogni esperienza, cioè necessarî ed *a priori*.

3. Il secondo periodo sostiene che è assai più probabile che gli assiomi geometrici siano empirici, ma in ogni caso è ancor più ragionevole ammettere che ogni interpretazione non è altro che un modello convenzionale più o meno comodo; e adduce queste prove:

a) la gratuità dell'affermazione della necessità degli assiomi, basata sul fatto che essa si riduce ad una pura credenza, destituita d'ogni prova;

b) l'impossibilità d'ogni prova positiva della ne-

Digitized by Google

cessità, basata sul fatto che ciò che è necessario deve stare assolutamente all'infuori d'ogni prova;

c) la possibilità generica della prova empirica, basata sul fatto che l'impossibilità di essa non si può rigorosamente provare, giacchè l'incapacità attuale di fornire la prova d'un fatto non prova nulla contro la verità del fatto medesimo, nè può diventare solo per questo il fondamento logico del fatto contrario. La verità delle nostre conclusioni non può dipendere dalla questione di sapere se noi siamo ora in grado di ottenerle o no;

d) la possibilità che l'impossibilità della prova empirica non deponga contro la natura empirica degli assiomi, basata sull'ipotesi che gli assiomi potrebbero essere storicamente empirici, ma attualmente improvabili, essendo impossibile far rivivere la formazione naturale di tutte quelle occasioni che ci hanno precisamente condotti ad essere ciò che prima non eravamo;

e) la possibilità della verificazione empirica ma relativa cioè approssimativa di tutti gli assiomi geometrici, basata sul fatto che si può mostrare — nei limiti dell'esperienza mediata — che essi costituiscono almeno l'ipotesi più semplice e più comoda per la spiegazione dei fatti, per quanto si possano immaginare altre ipotesi che renderebbero conto assai bene anche di altri fatti che non sono spiegabili colle ipotesi classiche fondamentali. In senso largo, si può dire che gli assiomi geometrici sono suscettibili di verificazione empirica come lo sono tutte le altre leggi scientifiche ordinarie;

f) l'inutilità di considerare l'esattezza come condizione positiva ed assoluta, attestante una perfezione superiore all'esperienza, basata sul fatto che l'esattezza geometrica non è che un impoverimento della realtà,

Digitized by Google

spiegabile semplicissimamente coll'eliminazione delle irregolarità che presentano le determinazioni sensibili; giacchè le figure geometriche non sono che copie semplici dei punti, delle linee, dei circoli ... che lo spirito ha conosciuto coll'esperienza (Boutroux);

g) la relatività di tutti gli assiomi geometrici, basata sul fatto che essi — ad onta del loro preteso carattere universale e necessario — non sono affatto necessarî alla geometria meteuclidea e quindi non sono universali. E in questo argomento pare che ci sia non solo un'ipotesi legittima ma un fatto positivo d'estrema importanza. In mancanza d'una prova sperimentale e percettibile, la Metageometria può diventare una prova logica e psicologica diretta, atta a mostrarci la particolarità e la costruttibilità di infinite geometrie differenti. Le conseguenze portate da quest'ultima ragione sono molto gravi. Come da un lato non possiamo provare con certezza che neppure il nostro spazio sia rigorosamente euclideo, e dall'altro, se non lo fosse non potremmo neppure provare che esso non lo sia, così diventa necessario adottare, anche a proposito della natura e del valore degli assiomi tutti, quell'abito di prudente riserbo che s'impone circa la natura ed il valore di ogni altra legge scientifica.

In conclusione, questo secondo periodo dice: noi siamo di fronte a due ipotesi contrarie. In favore della prima milita l'impossibilità della prova diretta della seconda; in favore della seconda milita l'impossibilità della prova diretta della prima. Tanto la prima però, quanto la seconda, possono portare un forte contingente di prove indirette a loro sostegno.

Tuttavia dal confronto tra le varie prove risulta che:

1° se le prove della natura empirica degli assiomi geometrici sono poco esplicite e positive, le

Digitized by Google

prove contrarie sembrano ancora più generiche e inconcludenti;

2° entrambe non escono fuori dal piano generale dell'ipotesi, talchè si può concludere che esse non sono altro che spiegazioni sistematiche o modelli più o meno comodi.

4. Il terzo periodo è assai vasto, e potrebbe suddividersi in più momenti. Ma noi ci limiteremo ad una brevissima recensione del primo momento che ci pare storicamente compiuto, mentre gli altri vanno appena appena delineandosi nelle tendenze novissime dei matematici. Riduciamo fedelmente in questo primo momento le tre fasi della storia della Metageometria tracciate dal Russel in accordo col Klein. In tutte le tre fasi di questo momento si assiste allo sviluppo di un'idealità *semplificativa* per cui si tenta di ristabilire la completa indipendenza logica del sistema matematico.

Nella 1ª fase si intraprende la riduzione degli assiomi della Geometria ai minimi termini, e si assiste allo sviluppo di un ramo speciale delle matematiche per opera di Lobatchewsky e di Bolyai.

Nella 2ª fase i geometri (Riemann, Helmholtz) vedendo che un qualche assioma è superfluo (l'assioma delle parallele di Euclide) tentano di mostrare che lo sono pure tutti gli altri, ma restano infine costretti a ritenerne tre fondamentali. S'accentua l'opposizione a Kant; l'Algebra è ammessa come scienza *a priori;* la Geometria, per la nozione fondamentale di misura, non derivando dalle leggi dell'Algebra, è considerata come empirica.

Nella 3ª fase (Cayley, Klein) l'opposizione ad Euclide tende a scomparire; i tre assiomi fondamentali che hanno resistito alla critica della 2ª fase sono sempre

Digitized by Google

ritenuti; ma la nozion di misura non è più considerata come fondamentale; così al metodo quantitativo (Geometria metrica) si oppone il metodo descrittivo o proiettivo (Geometria proiettiva) per lo studio delle proprietà dello spazio.

Al secondo momento del terzo periodo potrebbero forse essere assegnati i lavori di quei matematici che, pur continuando l'indirizzo anteriore, eliminano, non solo completamente la nozione di misura della Geometria proiettiva, ma tentano di darci di questa nozione una definizione analitica, riuscendo così a fare della Geometria metrica una conseguenza della Geometria proiettiva. Così tutta la geometria tanto sintetica o metrica quanto analitica o proiettiva sarebbe spiegabile completamente coi soli dati *a priori* (1).

Insomma, questo terzo periodo — mutuando la parte più feconda del periodo antecedente — dice: se ogni sistema matematico non è altro che una convenzione astratta ed arbitraria dello spirito umano, e tutto è costruttibile e rappresentabile colla sola condizione di non implicare contraddizione, il partito più ragionevole resta quello di cercare unicamente il modello più comodo. Abbandonando dunque le questioni di fondo tentiamo di ristabilire la completa indipendenza delle matematiche, dimostrando che tutte le cose sono perfettamente spiegabili nel caso che si vogliano considerare come una teoria puramente logica.

Questi fatti sono innegabili, e meritano di essere meditati profondamente.

---

(1) Il Tannery osserva che v'ha in questo cammino dello spirito umano un esempio notevolissimo del passaggio dal punto di vista sintetico al punto di vista analitico, presi nel senso rigoroso di Kant.

Digitized by Google

5. Ma se nella presente esposizione la serie delle interpretazioni diverse degli assiomi geometrici ha raggiunto — mercè il sussidio dei fatti storici — un notevole rigore, non può dirsi che essa abbia pure raggiunta la semplicità. Una semplificazione ulteriore si otterrebbe fissando i momenti dell'interpretazione dell'assioma geometrico nella maniera seguente:

1° In un primo periodo lo spirito critico, riconoscendo le varie generalizzazioni più ampie dell'esperienza come proprie a spiegare una dopo l'altra diverse classi di fenomeni, afferma l'immediato valore pratico degli assiomi, come ispirazioni geniali d'accordo con le testimonianze dei nostri sensi, e, rimanendo nel piano della immediata constatazione del fatto, accetta la promiscuità caotica d'ogni assioma come sostrato necessario e immanente della conoscibilità. In questo periodo non è riconosciuto il carattere affatto tautologico ed empirico degli assiomi, i quali, più che conosciuti, vengono *goduti* in una specie di mistica e gratuita supposizione.

2° In un secondo periodo succede un'acre opposizione tra i fautori dell'innatismo e quelli dell'empirismo. Lo spirito critico trascende il pregiudizio anteriore e diffusissimo che i principî assiomatici debbano considerarsi gratuitamente come verità superiori e indipendenti da ogni esperienza e capaci di una certezza, non solo di grado, ma di natura differente. Si dimostra che l'affermazione dogmatica si appoggia a prove di patente illegittimità; gli assiomi universali sono dichiarati pure semplificazioni ideali delle forme dei processi empirici; all'assoluto si oppone la cristallizzazione astratta del relativo. La natura necessaria e imperativa dei giudizî matematici si dissolve; la credenza nell'*a priori* dell'assioma diventa una supersti-

Digitized by Google

zione; e non si può più parlare della vecchia necessità apodittica degli assiomi senza far sorridere di compassione. Così, alle posizioni dogmatiche del primo periodo, si oppongono le verità sperimentali del secondo raggiunte con la sostituzione della immagine astratta all'oggetto concreto.

3° Per comprendere la terza interpretazione sono necessarî alcuni schiarimenti. Il secondo periodo finisce con una teoria scettica dell'esperienza; il terzo riassume piuttosto l' esperienza suprema della teoria. In verità lo spirito critico, mutuando dal 1° periodo la possibilità, dal 2° l'impossibilità del sapere che oltrepassa l' esperienza, comprende la necessità di allargare il concetto d'esperienza e conclude che l'esperienza insegna tanto a restare quanto a trascendere l'esperienza stessa. Così l'assioma viene interpretato definitivamente come l' unità sintetica dei due periodi, come un prodotto nuovo dipendente e pur indipendente dall'esperienza, fine e principio, causa ed effetto ad un tempo; causa rispetto alla conoscenza susseguente, effetto riguardo all' antecedente. Il lettore non si meravigli di queste contraddizioni in una scienza che pare non ammetterne alcuna; esse non distruggono la realtà, tanto meno il fatto della conoscenza; piuttosto lo avvalorano, come avviene nella formazione naturale di qualsiasi funzionalità o idealità, — dalla legge della pianta, alla legge della giustizia, — la quale è pur giocoforza considerare come una causalità che è l'effetto di quel processo formativo che prima l'ha causata (Ardigò).

6. Elevandoci finalmente al disopra di tutta la grande selva mitologica degli assiomi d'ogni ordine e d'ogni portata, che hanno sempre costituito un osta-

Digitized by Google

colo brutale alle indagini dei pensatori, noi possiamo vedere fino a che punto abbia ragione il Milhaud di rivolgere questa domanda a colui che, in ogni punto della sua vita, non ha mai posto in dubbio la certezza e la funzione assoluta degli assiomi matematici: " Nous demandions tout à l'heure ce qu'eût pensé Kant de l'analyse moderne. S'il eût vécu de notre temps, il aurait connu des Géométries où ne figurent plus les axiomes qu'il déclarait d'une nécessité absolue; il aurait connu bien des tentatives de leur substituer telle ou telle série d'hypothèses. Certes il aurait pu, en face d'elles, garder intacte sa foi première..... mais les croyances sont-elles faites de démonstrations? „ (1).

(1) MILHAUD, *Kant comme savant.* « Revue Philosophique », 1895, vol. I.

Digitized by Google

PARTE TERZA

LE TEORIE

Digitized by Google

Digitized by Google

CAPITOLO PRIMO

Dell'esperienza e delle teorie logiche matematiche e fisiche in ordine alla teoria generale dei modelli.

---

1. Entriamo ora nel campo d'una più ricca idealità. Dopo d'aver preso conoscenza delle idee e dei giudizi delle scienze astratte e astratte-concrete (Logica — Matematica — Fisica) resta a vedere, quasi a corona dell'intero organamento logico di queste scienze, ciò che si deve intendere per *teoria di una serie di fatti;* e se e come, per i diversi ordini di fatti logici, matematici e fisici, si debba ammettere una soluzione unica e comune o altrettante soluzioni differenti.

Il problema è dunque molteplice, comprendendo lo studio della teoria logica, della teoria matematica e della teoria fisica.

Per essere più chiaro — trattandosi d'un genere di ricerche ove la chiarezza e la semplicità non sono mai soverchie — voglio dire che è ben importante sapere se le soluzioni che bastano ad una di queste teorie hanno un valore logico e pratico anche per le altre. La soluzione di questo problema molteplice servirà eziandio

Digitized by Google

a risolvere con nuove ragioni la vecchia questione della pratica e della teoria, intorno a cui ora vivissima si riaccende la controversia, sia per effetto della stessa cultura scientifica oramai tanto elevata e sublime, sia per effetto del senso sempre più pratico e positivo della vita.

2. La teoria ha un'utilità pratica qualunque? Se noi apprezziamo le cose in proporzione dell'utile che se ne può ricavare, quale è l'utile derivante dalla teoria? È noto che per un logico e per un matematico le possibilità d'una spiegazione fisica d'una serie di fatti logici o matematici qualsivoglia, è l'ultima cosa alla quale venga fatto di pensare. Ciò che importa ad un fisico d'altra parte — e nel maggior numero dei casi — non è già di poter pensare una soluzione astratta per un certo determinato sistema materiale, o di poter calcolare, con precisione matematica, alcune certe grandezze del sistema proposto, ma piuttosto di sapere l'andamento sperimentale e concreto dei fatti nel campo delle esigenze materiali imposte dalla pratica. Nel campo delle scienze fisiche e d'applicazione pertanto, così dai partigiani dello studio teorico come da quelli dello studio pratico è facile constatare ad ogni tratto che " le soluzioni che bastano perfettamente al primo, non hanno molte volte per il secondo nessunissimo valore pratico " (1).

Ora è facile comprendere che se ancora da moltissimi tecnici si guarda con grande sfiducia agli sviluppi sapienti dei matematici come ad un complesso di cose

(1) A. Garbasso, *Sopra alcuni modelli di fenomeni elettromagnetici*, « Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana », vol. II, fasc. I, 1898, Milano.

Digitized by Google

inutili, a più forte motivo si potrebbero ritenere come infondate tutte le ragioni che militano in favore d'ogni ricerca logica sopra la pura teoria della scienza.

Nondimeno siccome il risultato di queste ricerche riesce ad una praticità che può venire non sospettata solo da quanti affettano per le dottrine astratte un'avversione o una diffidenza ingiustificata ed ingiusta, così sarà utile consultare nuovamente tanto la ragione quanto l'esperienza per vedere se non è possibile prendere in prestito dalla prima un metodo che giustifichi completamente la seconda e viceversa.

3. A tale scopo capovolgeremo l'ordine delle tre scienze finora esaminate e fermeremo la nostra attenzione prima sopra la teoria fisica, poi sopra la teoria matematica, da ultimo sopra la teoria logica quanto alla loro formazione; perchè volendo sapere se si può introdurre nella teoria generale di queste scienze un postulato comune (*la piena e mutua convertibilità delle varie teorie logiche, matematiche e fisiche, fondata sul fatto della loro perfetta equivalenza*) e ricercare in quale misura il postulato introdotto modifichi le formalità scientifiche dei varî ordini, e giudicare da ultimo sull'esattezza della nostra ipotesi, ritengo che sia sommamente vantaggioso cominciare da quel caso che offre le operazioni da compiersi e le conseguenze da dedursi nel modo più materiale e starei per dire più visibile, anche nel senso ristretto della parola.

4. Per cominciare lo studio della teoria fisica ricordiamo che la scienza fisica in genere si divide in due parti: Fisica sperimentale e Fisica matematica. La prima si erige sul fatto speciale dell'esperienza; la seconda sul fatto speciale della teoria.

Digitized by Google

Come tutti sanno, non si tratta qui di intendere la esperienza come la semplice somma delle verità acquistate immediatamente o mediatamente; cioè la moltitudine delle presentazioni particolari associate che l'uomo ha o si ricorda di avere avuto. Ciò che costituisce la differenza specifica della Fisica sperimentale è piuttosto l'uso volontario della modificazione artificiale delle circostanze dei fatti fisici che più propriamente dicesi *esperimento*. L'intento speciale invece della Fisica matematica è diverso. Ma sarebbe un grave errore il supporre che l'abbandono del carattere specifico dell'esperienza concreta significhi per essa la rinunzia radicale d'ogni forma dell'esperienza. La differenza specifica della Fisica matematica indica solo la preferenza accordata a quella *forma superiore di esperienza* che ci permette di prevedere i fatti, cioè di generalizzarli. Perchè senza generalizzazione la previsione è impossibile. Infatti il bisogno di poter prevedere quali fatti succederanno in date circostanze e di sapere quali circostanze si dovranno attuare per ottenere certi fenomeni che si desiderano è la sola giustificazione veramente vitale della Fisica matematica.

" Conoscere le leggi della natura è essere in grado di dedurre dallo stato attuale delle cose lo stato loro per un istante qualunque " (1).

Tale — secondo Hertz — è precisamente lo scopo più generale di questa scienza, la quale sotto un certo punto di vista ci rende pertanto famigliare una ricerca che — nei casi ordinari della vita — ci parrebbe non solo impossibile ma anche assurda.

L'ideale della Fisica matematica è di trasformare quel doppio mistero in cui fluttua tutta la nostra vita,

(1) Hertz, op. cit., pag. 1.

Digitized by Google

lo spazio ed il tempo, in un solo visibile immediato ed immenso presente, che ci sia come la storia immutabile ed eterna degli effetti e delle cause dell'universo.

5. Studiamo ora rapidamente il processo che compie lo spirito per giungere alla conoscenza delle leggi fisiche e quindi alle costruzioni delle teorie fisiche corrispondenti.

I fisici di tutti i tempi hanno sempre cercato di dissociare con artifizî sperimentali diversi i fasci complessi di fenomeni, dovuti all'azione simultanea di più cause, che la natura offre alle nostre ricerche. Questo isolamento dei varî agenti fisici non si può ottenere se non costruendo artificialmente delle combinazioni tali di circostanze che in ciascuna di esse non *agisca* se non una delle cause, o almeno l'effetto delle altre sia insensibile e quindi si possa separatamente studiare l'azione di ciascuna.

Isolate così le singole cause e trovati i valori corrispondenti alle varie grandezze che vi figurano mediante successive rappresentazioni geometriche che diano la curva continua dei varî punti, si ottiene facilmente l'espressione analitica della legge di dipendenza fra le varie tendenze che occorrono nel fenomeno studiato. Trovate che si siano le varie leggi fisiche separate che governano i varî ordini dei fenomeni e la loro analitica espressione, si ricerca se esse siano o non siano indipendenti fra loro, e bene spesso si giunge alla conclusione che esse non lo sono, ma che anzi avendone ammesso una (ovvero più) non si può senza contraddire alle leggi del pensiero non ammettere le altre. Allora queste ultime non si possono più considerare come leggi veramente distinte dalla prima; esse non ne sono che *conseguenze logiche* e *fisicamente* non sono che la *stessa legge* ripe-

Digitized by Google

tuta sotto altra forma — e in tal guisa la scienza fisica giunge al progressivo e supremo coordinamento delle sue leggi.

Questa — da un punto di vista generalissimo — è la via che segue lo spirito umano per giungere alla conoscenza delle leggi fisiche.

C. Ma consideriamo ancora più attentamente le cose. Le operazioni accennate ci dimostrano che il solo tentare di giungere alla conoscenza anche della più umile legge della natura presuppone tutto un *processo d'astrazione intellettuale* che è della massima importanza.

Infatti per poter giungere alla precisione matematica desiderata, essendo necessario ragionare sopra *grandezze* e *relazioni* assolutamente esatte, noi siamo condotti a cercar di ridurre i corpi naturali ed i loro fenomeni al massimo grado possibile di semplicità e di precisione. Ma poichè è raro il caso in cui la semplice osservazione di una classe di fenomeni basti a farcene scoprire le leggi, così noi ricorriamo — come fu detto — allo *isolamento artificiale dei varî agenti fisici*, cioè ad una serie di combinazioni artificiali di circostanze tali che tutte le difficoltà si possano vincere separatamente. In altri termini ricorriamo all'espediente di **sostituire al sistema naturale dei corpi proposti, un altro sistema artificiale di corpi corrispondenti** che abbia sopra il primo il vantaggio di potersi studiare più facilmente.

In ciò — come è noto — consiste l'arte della *esperimentazione*, che si ottiene mediante apparecchi più o meno complicati a cui si dà il nome generico di *strumenti di fisica* e che si applica ormai in tutte le scienze sperimentali su vastissima scala. Ora che altro sono questi sistemi o apparecchi o strumenti artificiali ado-

Digitized by Google

perati con tanto profitto nella Fisica sperimentale, se non combinazioni rappresentative o *rappresentazioni semplificate* dei fatti?

E chi non vede che nell'accordo fra i risultati dell'esperienza e i fenomeni fisici si rivela ben chiaramente che le scienze sperimentali hanno un vero e proprio carattere rappresentativo, onde le varie creazioni strumentali della scienza, le cui proprietà corrispondono con una approssimazione sufficientissima in molti casi, alle proprietà dei varî corpi naturali, si potrebbero considerare come veri *ritratti scientifici* dei fenomeni dati?

È per questa e per altre ragioni, che esporremo verso il termine di questo lavoro, che noi ci sentiamo autorizzati a dichiarare che tutta la Fisica e con essa tutte le scienze a base di esperimento riposano sopra un vero e proprio fondamento artistico che sarebbe omai tempo che fosse riconosciuto e meditato in tutta la sua grande portata nel campo filosofico.

7. Ma ciò che merita di suscitare le nostre più alte meraviglie è che non solo tutte le scienze fisiche fondate sull'esperimento rivelano per questo medesimo fatto la loro artistica natura, ma che anche le scienze fisiche basate sulle teorie più alte e più difficili dell'analisi matematica, sono — appunto per questa loro base teorica — null'altro che vere e proprie scienze d'esperimento Noi ci avviciniamo ad un'epoca in cui il significato dell'esperienza si allarga in un campo che sembrava dapprima assolutamente interdetto. L'esperimento si compie così sopra i fatti e coi fatti di natura fisica, come sui fatti e coi fatti di natura eminentemente intellettuale.

Infatti quando, pur sentendoci spinti dall'insaziabile

Digitized by Google

bisogno di precisione e di semplicità, ci troviamo nella materiale impossibilità di rappresentare un dato ordine di fatti fisici con una corrispondente costruzione tecnica o strumentale soddisfacente, architettata a loro imagine e somiglianza, quando cioè riesce assolutamente impossibile di sostituire un paradigma materiale rappresentativo ad un dato ordine di fatti: non ricorriamo forse all'esecuzione artificiale di un'altra rappresentazione semplificata, ma di natura puramente intellettuale, che ci offre il vantaggio di poter operare la sostituzione desiderata, cioè di poter studiare quel dato ordine di fatti — cogli attuali mezzi matematici e logici di cui disponiamo — fin nelle più minute particolarità e di dedurne fino alle ultime conseguenze?

A queste rappresentazioni semplificate si è dato il nome assai adatto di *modelli*.

8. Ora è evidente che se si possono avere *modelli* puramente logici, modelli algebrici, modelli geometrici, modelli fisici, modelli meccanici, modelli chimici, ecc., come s'intenderà meglio dai varî esempi che incontreremo fra poco, e se l'unica condizione di verità a cui deve soddisfare un modello qualunque è questa, che le conseguenze che per *necessità logica* possiamo dedurre da un tale modello siano alla loro volta modello di quei fenomeni che per *necessità fisica* scaturiscono dagli oggetti considerati; allora ne risulta che tutti quanti i modelli indistintamente hanno un vero e proprio carattere sperimentale, perchè noi appunto li sostituiamo tutti e quanti alla realtà perchè si possono studiare più comodamente.

9. Per questa maniera di considerare i fatti si dilegua quasi la differenza che si pone ordinariamente

Digitized by Google

tra la Fisica sperimentale e la Fisica matematica, non essendovi vera differenza di natura tra i *modelli materiali o concreti e i modelli intellettuali o astratti.*

La Fisica matematica acquista il diritto d'essere considerata come una vera e propria scienza sperimentale, e la Fisica sperimentale può venire considerata come una vera e propria scienza teorica — dal momento che il vocabolo *teoria* diventa sinonimo d' immagine rappresentativa o modello nel senso proposto con tanta fortuna dall'Hertz. Tutt'al più si potrebbe parlare di modelli di primo grado e di secondo, per distingere le rappresentazioni concrete dalle rappresentazioni astratte.

Ma non è ora il luogo di insistere sopra queste sottigliezze.

10. L'esempio addotto per la formazione delle teorie fisiche ci permetterà ora di tracciare più schematicamente la teoria generale dei modelli fisici, matematici e logici, la qual cosa — in ultima analisi — si ridurrà alla dichiarazione di ciò che si potrebbe dire la *teoria delle teorie*, senza fare abuso di linguaggio.

E questa considerazione costituirà l'origine prima di tutta una serie di idee nuove e di applicazioni feconde tanto per l'educazione delle facoltà spirituali indispensabili al lavoro imaginativo della scienza, quanto per l'apprezzamento e la praticità delle singole teorie logiche, matematiche e fisiche.

11. Il processo che segue lo spirito quando forma la teoria d'una serie di fenomeni naturali consta dunque delle cinque operazioni seguenti:

1ª Si costruisce un *modello* (soddisfacente a certe condizioni determinate);

Digitized by Google

2ª Lo si mette in funzione (come una macchina qualunque);

3ª Se ne deducono le conseguenze artificiali;

4ª Si paragonano questi risultati ottenuti coi risultati offerti dalla natura;

5ª Si formula la legge, e nei casi possibili se ne scrive l'espressione analitica (equazione).

Il modello imaginato può essere un *meccanismo materiale* (congegno, macchina, apparecchio, strumento, ordigno, arnese, ecc.), o un *meccanismo ideale* (teoria, sistema, aggregato, ordine, serie di proposizioni, ipotesi, ecc.) costruito opportunamente in modo tale che se qualche parte di esso si muova, per l'azione di forze interne — nel caso che si tratti per esempio d'un sistema libero — le altre si spostino in una misura determinata, così che le aree si annullino e il centro di gravità rimanga in riposo o perduri nel movimento equabile (1).

I risultati artificiali, meccanici, dinamici o logici, che si ricavano per la prima volta dal funzionamento della macchina modellare proposta quando s'accordino coi risultati naturali, che si ricavano dalla *Machina rerum*, esprimono dei fatti nuovi e delle leggi nuove.

12. Venendo ora all'esame della formazione delle *teorie matematiche*, vi sono delle buone ragioni per ritenere che si verifichi una certa analogia fra le operazioni che si compiono dallo spirito a tale intento e quelle che furono descritte per il processo delle teorie fisiche.

Nel caso che ci occupa, il ravvicinamento fra i fe-

(1) Garbasso, *Sopra alcuni modelli di fenomeni elettromagnetici*. Estratto cit., pag. 4.

Digitized by Google

nomeni della teoria fisica e quelli della teoria matematica non solo è completo, ma ci mostra eziandio la possibilità di studiare altri fenomeni non ancora osservati.

Mi spiego, citando le parole del Garbasso, il quale da tanti anni sostiene, illustra e feconda brillantemente quella grande teoria dei modelli nel campo della Fisica e della Matematica, che costituisce uno dei meriti più singolari di Enrico Rodolfo Hertz.

" Noi abbiamo costruito, a poco a poco, alcuni organi elementari semplici, che chiamammo funzioni. Tali organi, a poco a poco, abbiamo imparato a riunirli con segni, formandone certe macchine complesse, alle quali fu dato il nome di equazioni. In una equazione infatti, se uno dei termini si modifica, gli altri cambiano opportunamente di valore per modo che l'equilibrio non si turbi. Appunto come in un sistema libero, se qualche parte si muove per l'azione di forze interne, le altre si spostano in una misura determinata, così che le aree si annullino e il centro di gravità rimanga in riposo e perduri nel movimento equabile.

" Volendo formare la teoria di un fenomeno si costruisce una equazione, che soddisfi alle leggi già note; e poi questa macchina analitica la si fa funzionare, vale a dire si trasforma, in guisa da ottenerne nuove leggi e nuovi fatti. Ma in luogo dell'apparecchio algebrico si potrebbe porre, con uguale diritto, e con altrettanto rigore logico, e con pari utilità, un congegno materiale, costruito opportunamente.

" Uguagliando una lettera ad un seno, che abbia nell'argomento il tempo alla prima potenza, si ottiene una rappresentazione d'una corrente oscillante; ma una rappresentazione altrettanto buona e più semplice si può costruire appendendo una pallina ad un filo

Digitized by Google

sottile di lunghezza costante. Logicamente ogni cosa è comune fra il *modello algebrico* e il *modello meccanico;* ma tanto l'uno che l'altro hanno con il fenomeno un semplice rapporto di corrispondenza „ (1).

Non è possibile essere più espliciti e convincenti. Segue da questi ravvicinamenti fra la formazione della teoria fisica e della teoria matematica che lo spirito compie in entrambi i casi le medesime operazioni.

Il modello matematico imaginato può essere pertanto non solo un *meccanismo ideale* (teoria, equazione, sistema d'equazioni, ecc.), ma anche un *meccanismo materiale* (macchina, apparecchio, congegno, strumento, ecc.) costruito opportunamente in modo da soddisfare a tutte le condizioni imposte dal problema analitico. Segue senza più che in certi casi le varie teorie fisiche (ricavate dall'osservazione empirica dei fatti) e le matematiche (desunte dalla pura riflessione astratta delle idee) sono equivalenti e quindi rigorosamente convertibili e sostituibili fra loro e ciò tanto nella pratica, quanto nella teoria.

Il risultato è per noi interessantissimo perchè mostra una volta di più il nesso che intercede tra le varie forme dell'esperienza e le varie forme della teoria.

13. Passiamo finalmente all'esame della formazione delle *teorie logiche*. A questo punto mi sia lecito il ricordare che io non conosco veramente nessuna opera, dove il sussidio della teoria dei modelli sia stato rivolto allo studio di un problema logico qualunque (2).

---

(1) A. Garbasso, op. cit., pag. 4.

(2) L'unico e primo accenno per quanto fugace e indeterminato si trova nella mia Nota *Sopra l'Esperienza mediata* inserita negli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXVI, gennaio 1901.

Digitized by Google

Nondimeno ritengo che l'introduzione dell'ammirabile teoria dei modelli nel campo della scienza logica sia un fatto di capitale importanza.

Quando noi ci proponiamo di comprendere tutto l'organamento logico della Logica, sceverando prima le idee primitive dalle derivate, poi i giudizî primitivi dai derivati, quindi i giudizî ordinati intorno ad un dato soggetto dai giudizî confusi, e cerchiamo di ridurre *le relazioni delle idee* a regole semplici e chiare, ci dobbiamo ben tosto convincere che ci è giocoforza considerare le idee *come se* fossero una semplice " molteplicità di *elementi omogenei* fra loro, così nei loro elementi, come nei loro composti, che sono sempre idee, analogamente ai multipli e sottomultipli delle quantità che sono sempre quantità. "

Questa specie di entificazione delle idee ci porta a conchiudere senza fatica che volendo farci una rappresentazione mentale completa o un *modello ideale* chiuso in sè e regolare d'un sistema di fatti logici qualunque noi finiamo, in ultima analisi, per ricorrere all'artifizio di sostituire alle idee date, quasi un gruppo d'altre idee più concrete, e suscettibili di essere tradotte per mezzo di segni immediatamente osservabili coi sensi.

È un fenomeno assai comune e ciascuno l'intende subito, perchè ciascuno l'ha sperimentato e lo sperimenta giornalmente. Ogni provetto cultore degli studî logici ha in testa una serie di imagini fattizie o modelli logici convenzionali dei fatti logici stessi, che vengono costruiti e rinnovati con determinato ordine e simmetria, e tutti insieme formano come un quadro mentale che si richiama quasi automaticamente, ma in modo vario a seconda della vivacità e della prontezza dell'imaginazione. Non è ora il caso di fermare la

Digitized by Google

nostra attenzione sopra questa attività imaginativa o rappresentativa che dir si voglia, così utile negli atti mentali in genere e specialmente nelle ricerche astratte del puro ragionamento, dove essa offre quasi sempre un sussidio efficacissimo alle scoperte.

14. Piuttosto importa che si ritenga ben chiaramente che, se i risultati logici che si ricavano dall'impiego o funzionamento artificiale dei modelli logici escogitati, s'accordano perfettamente coi risultati naturali del sistema mentale proposto, ciò significa che noi, costruendo un'imagine o schema accettabile dei fatti mentali proposti, non facciamo altro, in ultima analisi, che costruire una *macchina logica*, operando sulla quale siamo in grado di ottenere tutta la serie dei risultati mentali proposti.

Volendo poi passare all'esame della relazione per gli enti logici *rappresentati*, diremo così, ed enti logici *rappresentativi* (modello), si può ben ammettere la convenienza di abbandonare deliberatamente ogni ricerca sulla fondamentale ed intima natura degli atti logici; si può ammettere che ogni filosofo mantenga caro il suo principio prediletto, che gli può sembrare più acconcio di ogni altro a costituire la pietra fondamentale della conoscenza. Ma resta pur sempre libero a noi di supporre che gli enti logici rappresentati differiscono dagli enti logici rappresentativi — (almeno per i bisogni descrittivi della scienza) non in sè ma solo per rispetto ai mezzi di cui ci serviamo per le nostre osservazioni. Questo modo di considerare le cose logiche — che io mutuo dall'ammirabile teoria di Hertz (come spero che il lettore comprenda di leggieri dopo le parole testuali che furono riferite nel capitolo III della prima parte di questo saggio a proposito della

Digitized by Google

teoria degli *enti nascosti*) — è appunto l'ipotesi che io voglio introdurre nella formalità della teorica logica.

Noi supporremo cioè che il processo che segue lo spirito quando forma la teoria logica d'una serie di fenomeni logici, si compia mediante le stesse cinque operazioni successive che furono riferite a proposito del processo delle teorie fisiche e matematiche; noi supporremo cioè che quando imaginiamo una teoria logica capace di spiegare un intero ordine di idee, e vogliamo giudicare in modo rigoroso della sua esattezza, in ultima analisi non facciamo altro che ciò che si potrebbe fare più materialmente con la costruzione e la messa in opera di una macchina fisica o analitica particolare.

In breve, per quanto possa sembrare paradossale questa opinione, noi possiamo riconoscere che la costruzione d'una teoria logica o *modello logico* che soddisfi a certe determinate condizioni, non differisce logicamente dalla costruzione d'ogni altro *modello fisico* (congegno, apparecchio, strumento, macchina, ecc.) o *modello matematico* (teoria analitica, equazione, sistema d'equazione, ecc.) costruito appositamente, anzi deve potere essere sostituita e a sua volta deve poter sostituire ogni altro modello corrispondente, con eguale diritto, con altrettanto rigore logico e con pari utilità.

15. E poichè è necessario che io aggiunga qualche prova diretta a sostegno di questa affermazione, che è forse la parte più importante del presente lavoro, il lettore mi consenta d'accennare ad una mia ricerca personale che sarà pubblicata a suo tempo, come saggio d'una applicazione pratica di questa teoria.

Dopo d'esser giunto alle conclusioni che son già note al lettore sopra la convertibilità e unificabilità

Digitized by Google

delle varie idee e proposizioni primitive logiche, matematiche e fisiche, io m'era proposto d'esaminare se si poteva giungere altresì al principio della piena e mutua rappresentabilità dei varî sistemi logici matematici e fisici; e in particolare se gli sviluppi teorici della Logica e della Matematica, ad onta della loro apparente cómplicazione, fossero suscettibili di una rappresentazione sperimentale soddisfacente. Ora il problema non si poteva risolvere, come bene si comprende senza studiare — nel modo più completo possibile — quanto succede, per tale riguardo, nel caso concreto della scienza fisica; dove, come ebbi già occasione di dichiarare, tanto la costruzione e il funzionamento, quanto l'utilità dei modelli materiali è visibile direttamente.

Prima di montare un apparecchio qualunque e prima d'intraprendere una lunga serie di esperienze che potevano anche approdare a nessunissimo risultato pratico, mi accinsi dunque a studiare la teorica generale dei modelli, nella profonda convinzione che almeno dal caso generale al caso particolare, incluso nel primo, si può ragionare con discreta sicurezza. Quindi giovandomi del sussidio dei modelli per la risoluzione d'una questione molto semplice, ma pure abbandonata oramai pressochè da tutti i Logici come inutile e vieta, della questione cioè dei rapporti logici di inclusione e d'esclusione fra le idee, considerate solo come universali e particolari, e in condizioni opportune, ho trovato precisamente quello che mi aspettavo di trovare.

I mezzi occorrenti per costruire meccanicamente un modello fisico dei fatti logici — come si vedrà a suo tempo — sono estremamente modesti. Per ora mi limito a constatare l'utile, così didattico come euristico, che deriva dalla rappresentazione meccanica dei fenomeni logici. Il modello ideofisico che ebbi occasione

Digitized by Google

di costruire imita assai felicemente tutte le particolarità più notevoli che si incontrano nelle tre grandi partizioni della Logica pura: dell'idea, del giudizio e del raziocinio. E l'utilità di queste macchine siffatte si riscontrerà ancora meglio quando le si impieghino all'esame di questioni non ancora risolute. Questi modelli ideofisici — da un certo qual punto di vista — non sono altro che finzioni visibili o grossolanamente empiriche della funzione del senso logico. Il loro esame ci apprende che ad ogni idea, ad ogni giudizio, ad ogni raziocinio perfetto o imperfetto in noi si compie un lavoro o associativo o dissociativo, di cui non possiamo in alcun modo indicare la natura fondamentale, ma di cui è ben possibile fornire una rappresentazione simbolica soddisfacente.

Con tale criterio noi tentiamo di fissare una corrispondenza rappresentativa anche tra il pensiero e l'azione meccanica, vogliamo anzi supporre che la cosa si verifichi affatto in generale e dire che la seconda, in certi casi, è una manifestazione equivalente del primo e viceversa.

16. Ma anche lasciando, per ora, da parte il modello ideofisico escogitato — intorno a cui ogni affermazione è certamente prematura, finchè rimane destituita d'ogni prova sperimentale diretta — non è poco interessante l'osservare che dalle pure esposizioni analitiche fatte finora, nel presente saggio, si può già dedurre più d'un argomento convincente in favore della nostra ipotesi. In verità noi abbiamo studiato finora tre sistemi di idee primitive e di giudizî primitivi (logici, matematici e fisici) che sono perfettamente convertibili, sostituibili e spiegabili in un modo comune.

Digitized by Google

Ora, perchè non sarà lecito a noi di supporre che questi tre sistemi ideali equivalenti possono essere considerati come vere macchine fisiche o apparecchi, o congegni o equazioni analitiche, o rappresentazioni o sistemi o teorie logiche, in una parola, *come veri e proprî modelli* che soddisfano a certe condizioni imposte dalla ragione o dall'esperienza e come tali possano funzionare, cioè trasformarsi in guisa da produrre nuovi fatti e nuove leggi in armonia coi risultati offerti dal pensiero e dalla realtà?

17. Ma una volta che si è messa la questione in questi termini non è difficile persuadersi che la risposta deve essere ad ogni modo affermativa. Non abbiamo visto — per i principî riferiti della convertibilità e della unificabilità delle varie idee primitive — che in luogo d'un sistema di idee primitive si può porre, con uguale diritto, un qualunque altro sistema ideale primitivo equivalente? E questo non equivale ad ammettere che ad una data teoria logica si può sostituire, con altrettanto rigore, una teoria matematica o fisica; e ad una teoria matematica una teoria fisica o logica; e ad una teoria fisica una teoria logica o matematica, a piacimento? Tutte queste conclusioni, alle quali ci ha condotto lo studio dei modelli, dovrebbero essere verificate ed illustrate con buon numero d'esempi. Esse formano in realtà un genere di ricerche originali, di cui non può venir posta in dubbio l'utilità.

18. Solo bisogna aver sempre presente che tutti questi modelli logici, matematici e fisici equivalenti devono essere considerati solo come uno strumento delle varie scienze, e non costituire le scienze medesime; devono essere solo un mezzo per scoprire il vero

Digitized by Google

e non il fine e la natura stessa essenziale della conoscenza scientifica.

19. In ordine ai modelli fisici dei fenomeni logici e matematici non sarebbe anche inesatto l'affermare che essi non sono altro che la trasposizione o la traduzione nel linguaggio dei sensi esterni, di ciò che avviene anche per il senso logico interno, ma che con questo sarebbe inesprimibile rappresentativamente; in altri termini: il pensiero stesso visto sotto un aspetto materiale, capace di suggerire dei vantaggi, talora superiori alle esigenze attuali del calcolo e della logica.

20. Giova inoltre ricordare che i varî modelli teorici equivalenti non hanno coi fenomeni rappresentati che un semplice rapporto esteriore di corrispondenza, per quanto logicamente ogni cosa sia fra di loro comune.

Bisogna dunque ben guardarsi dal credere che vi sia nei modelli proposti tutta la realtà o anche solo una parte.

Anche si comprende con quali riserve si possa andar incontro al massimo dei problemi, alla cui soluzione i pensatori anelano da ogni parte.

E in verità, trovandoci di fronte a un processo di fatti qualunque dei quali non si comprenda la ragione fondamentale, che cosa vorrà dire: trovare la spiegazione dei fatti?

Semplicemente questo:

1° formarci del processo naturale e spirituale che ci sta di fronte un'imagine o modello logico ben determinato; e cercare di formarcelo in modo tale che le conseguenze logiche delle imagini da noi costruite

Digitized by Google

siano alla loro volta imagini delle conseguenze naturali e spirituali dei fatti (1);

2° non far alcuna violenza ai dati naturali o spirituali del processo per giustificare anche il menomo riscontro tra i due ordini di fatti.

Se poi, in base a tutti i fatti, in parte sperimentali, in parte razionali, considerati, si volesse ancora venire ad una conclusione, si potrebbe dire unicamente che il nostro modello potrebbe renderci dei servigi euristici estremamente interessanti, qualora riesca adatto:

1° a riprodurre veramente con una disposizione teorica conveniente tutte le particolarità osservate nel processo dato;

2° a dimostrare che le leggi più generali secondo cui variano nei due sistemi le relazioni corrispondenti sono le medesime.

21. Ed in vero, in ogni nostro tentativo scientifico, noi abbiamo bisogno di giungere solo a due risultati:

1° la costruzione d'una disposizione, o modello soddisfacente d'un sistema dato;

2° l'affermazione d'una legge, o d'un sistema di leggi, di corrispondenza fra il sistema dato e il sistema proposto.

Esaminare i fenomeni più generali della conoscenza logica, matematica e fisica, separarli se è possibile, semplificarli, ridurli ai minimi termini, poi trovarne le equazioni fondamentali, e studiarli come se fossero ordinati appunto in un dato modo che ci permetta di render conto completamente di tutti, ecco il proposito nostro.

---

(1) Cfr. il mio *Saggio sopra l'Esperienza mediata* già citato.

Digitized by Google

A molti parrà strana e quasi inutile una ricerca che si aggira soltanto intorno alle formalità, per così dire estrinseche, dello spirito; ma noi sosteniamo che, come torna utilissimo — ricercando il modo di comportarsi di un fenomeno, o di una serie di fenomeni sperimentali dati — intraprendere la ricerca come se il fenomeno o la serie data si comportasse secondo le leggi di un gruppo di fenomeni differenti, così resterà sempre immensamente interessante, sia per la pratica, sia per la teoria stessa (la quale non può mai esser altra che provvisoria), il rappresentarci in modo qualunque, purchè sia *un* modo soddisfacente, il processo che compie spontaneamente lo spirito umano nella formazione naturale della conoscenza teoretica.

E questo s'intende solo per il modello escogitato, o, per dir meglio, per la descrizione rappresentativa del modello teorico proposto per i fenomeni dati. Ma chi non vede che colla nostra ricerca si esaudisce anche un'altra ricerca, che è di capitale importanza per i bisogni così della scienza come della vita, cioè alla determinazione concreta delle leggi?

22. Un grande legame intercede sempre — nel caso più favorevole — tra il sistema dato ed il modello o sistema proposto; e consiste in ciò che le leggi, secondo le quali variano le relazioni corrispondenti nei due sistemi, sono le stesse.

Dunque questa riproduzione artificiale della legge, anche nei casi in cui infiniti modelli, per esempio, soddisfacciano contemporaneamente allo stesso problema, non cesserà mai d'essere una sicura conquista dello spirito umano, ed un sereno conforto per gli studiosi.

Digitized by Google

23. Ma non basta. Siccome il nostro intento non è di velare, ma di rivelare tanto le virtù quanto le deficienze della teoria dei modelli, così noi non ci sforzeremo mai di far dire ad un principio ciò che esso disgraziatamente non dice; piuttosto ci par doveroso di far ben comprendere che l'accettabilità d'una teoria in genere può essere assai limitata. E questo può succedere per molte ragioni.

In primo luogo può trattarsi d'una vera deficienza rappresentativa dell'ipotesi proposta, perchè si riscontra spesso che alcuni fatti non si possono più spiegare con gli stessi modelli.

In secondo luogo potrebbe darsi che il processo dato non fosse rappresentabile di sua natura con niuna sorta di modelli. Ma la prima ipotesi sembra assai più probabile, perchè quasi sempre si scopre che quella serie di fatti che si ribella alla rappresentazione proposta, può essere invece riprodotta in ogni particolare, immaginando altre disposizioni teoriche completamente diverse dai primi modelli.

In terzo luogo potrebbe ancora succedere che il modello proposto avesse realmente colla realtà maggiori punti di contatto che non si sia potuto scorgere, a nostra vista, e che fosse realmente capace non solo di rappresentare un certo ordine di fatti, ma di render conto ugualmente bene di molti altri ordini di fatti impreveduti — e forse anche di più.

L'unica difficoltà tuttavia consisterebbe solo nella integrazione fortunata delle varie rappresentazioni teoriche parzialmente soddisfacenti.

24. Finalmente, se si obbiettasse che una ricerca consimile non potrebbe mai offrire una sola e sicura conquista agli studiosi, dovendo noi ammettere per

Digitized by Google

forza che, se i fenomeni del processo dato ammettono una soluzione teorica completa, ne ammettono infinite altre che possono render conto ugualmente bene di tutte le particolarità rivelate nel loro processo, noi potremo sempre rispondere che l'infinità delle immagini accettabili della realtà non depone in favore, ma contro il più radicale scetticismo, agevolando per infinite vie la ricerca e la scoperta della verità; come è possibile giungere alla stessa sorgente pur risalendo per uno qualunque degli infiniti rivi che sgorgano da essa.

Per gli scopi del presente lavoro parmi adunque molto opportuno rilevare quanto entusiasmo debbano avere i cultori zelanti della verità, sapendo che la ricerca e la rappresentazione dell'organamento logico della scienza si possono fare, seguendo infinite strade diverse, pur mantenendo la ricerca fedele ai severi principî tanto dell'esperienza, quanto della teoria.

25. Se noi avessimo bisogno ancora d'una prova per confermare che il fatto dell'esperienza fisica s'accorda perfettamente — in condizioni opportune — col fatto della teoria razionale, le considerazioni precedenti, a cui vogliamo aggiungere ancora qualche altro argomento, dovrebbero distruggere ogni dubbio.

È noto che i logici puri ed i matematici tentano di ricostruire razionalmente la loro scienza, sopprimendo il più che è possibile i postulati non primitivi e sostituendovi definizioni opportunamente scelte, producendo così delle teorie scientifiche puramente e strettamente formaliste, poste senz'altra preoccupazione all'infuori di quella di non implicare contraddizione. Non preoccuparsi affatto delle obbiezioni che non saranno accompagnate dalla prova che il punto di partenza medesimo è fuori di discussione; scartare ogni

Digitized by Google

intuizione sensibile, ogni dato concreto, o almeno ridurli al *minimum*; ecco la principale cura dei logici puri e dei matematici.

Ora che così si possa pensare da una parte è naturale. Conveniamo che la Logica analitica e la Matematica sono pure teorie astratte costruite sopra e coi principî primitivi dello spirito, e che la seconda è, in certo qual senso, il prolungamento analitico dell'altra. Possiamo anzi dire — in base alle nostre ricerche sulla riducibilità, convertibilità e unificabilità delle idee e sulle proposizioni primitive — che tanto la Matematica è una Logica derivata, quanto la Logica stessa è una Matematica rudimentale, poichè entrambe — per questa parte — non s'ergono che sulle purissime forme del pensiero e devono solo alla loro vacuità il carattere di indiscutibile certezza.

26. Ma è appunto per queste ragioni che noi affermiamo la necessità (per chi voglia ottenere una cognizione, per quanto è possibile, completa del fenomeno scientifico) di ponderare bene che cosa sia in generale una teoria, dal momento che la logica e la matematica non sono che delle teorie particolari. Possiamo noi contentarci di questa dogmatica affermazione: la scienza logica e la scienza matematica non sono che teorie pure ed astratte e come tali non hanno alcun rapporto coll'esperienza? Solo l'enunciare la questione in questi termini basta a far capire che almeno lo studio della questione medesima è indispensabile alla concezione filosofica. — I filosofi dogmatici non capiscono una tale necessità e poscia si interdicono ogni ricerca che si scosti dal loro punto di partenza, non volendo neppur porre in dubbio l'indipendenza assoluta della loro teoria.

Digitized by Google

27. Ma la nostra posizione è differente. Dopo quanto abbiamo potuto porre in luce sulla convertibilità, sulla unificabilità delle idee delle proposizioni e delle teorie, siamo convinti che si può affermare giustamente che la Logica, la Matematica e la Fisica sono nello stesso tempo indipendenti e dipendenti dall'esperienza, perchè esse non sono altro che modelli logici, matematici e fisici perfettamente equivalenti di uno stesso sistema fondamentale di idee primitive. Di più si comprende, senza fatica, che se più modelli sono modelli d'uno stesso fenomeno, ognuno di essi può prendersi come modello o rappresentazione degli altri. Resta a decidersi quale delle rappresentazioni possibili sia preferibile in generale.

Ma per ora tagliamo corto sopra questa questione, limitandoci a notare che — in tutti i casi ⊥ la scelta non può esser dettata che da ragioni di comodità affatto estranee alla verità delle cose.

Riteniamo dunque, in ultima analisi, che il fatto dell'esperienza è inseparabile dal fatto della teoria. — Teorizzare le cose è per noi null'altro che esperimentare le cose, come teorizzare le idee è null'altro che esperimentare le idee.

E se volessimo superare la ripugnanza di ciò che può parere un giuoco di parole ma non è, potremmo ancora concludere che l'esperimentare non è altro che un teorizzare e il teorizzare non è altro che un esperimentare.

28. Questa ne pare anzi la vera necessità primitiva ed inesplicabile dell'umana conoscenza, la mutua insidenza, il parallelismo dei modelli empirici e razionali, *a posteriori* ed *a priori*, necessarî e contingenti simultaneamente.

Digitized by Google

Le due teorie contrarie, l'innativismo e l'empirismo, hanno uguale valore. È dunque assolutamente necessario troncare ogni controversia a cui si deve l'ideazione difettosa così dell'esperienza come della teoria, e in cui troppi pensatori intricarono la loro meravigliosa innocenza di giudizio.

Ad ogni tratto esperimentiamo che i fatti naturali determinano dei fatti spirituali e viceversa. — In ogni ordine di conoscenza logica, matematica e fisica, vano tentativo è porre dei limiti fra esperienza e teoria, per affermarli insuperabili. Porre un limite è sempre già un superarlo. Porre una serie di limiti differenti tra due serie di fatti equivale a sperimentare due serie di fatti. Come gli empirici intransigenti si valgono di fatti non-empirici per produrre le loro esperienze, così i teorici intransigenti si valgono di fatti non teorici per produrre le loro teorie; a quelli serve inconsciamente la presupposizione teorica delle idee, a questi serve inconsciamente la presupposizione empirica dei fatti. A quelli è indispensabile la comparazione ideale, a questi è indispensabile l'esistenza delle cose. Chi lo nega ignora tanto la teoria dell'esperienza quanto l'esperienza della teoria, che ci forniscono la spiegazione dell'inseparabile continuità definitiva tra il pensiero e la realtà.

29. Ma c'è un modo ancor più paradossale di esprimere questa verità, che noi abbiamo dianzi dichiarata ed enunciata con termini del linguaggio ordinario. È consiste nell' affermazione che tanto l' esperienza quanto la teoria non fanno altro che insegnare allo spirito la necessità di trascenderle perennemente.

Che diventano per conseguenza — nell'attuale ipotesi — i due principî apparentemente contrarî, della espe-

Digitized by Google

rienza e della teoria? Diventano degli ordini tali che, avverandosi, dominano tutti i fenomeni scientifici indistintamente, e possono perciò venir assunti — con pari diritto — come modelli rappresentativi della necessità determinante della scienza.

30. Fatto singolare questo che si possano trovare due vantaggi ad un tempo e con una sola proposta; vale a dire, due rappresentazioni plausibili ed equivalenti di ciò che fu chiamato — con frase felice — dal Tarozzi (1) " l'organamento logico della scienza " (il modello empirico e il modello teorico) capaci di offrirci entrambi una spiegazione soddisfacente del carattere deterministico della scienza medesima.

Voglio dire che tanto il razionalismo puro, quanto l'empirismo puro finiscono per attribuire entrambi un carattere deterministico alla scienza.

Quest'ultima affermazione potrebbe sembrare gratuita, ma vedasi, col fatto, la ragione.

In primo luogo l'interpretazione classica della conoscenza logica e matematica, mantenendosi fedele al vecchio principio dell'*a priori*, affermando la fissità degli assiomi, e sostenendo l'assoluta indipendenza della Logica e della Matematica, non dogmatizza forse la razionalità eterna ed immutata delle sue leggi?

Ora quali che siano le ragioni speciali, in favore dell'*a priori*, è chiaro che il processo di questo sfrenato razionalismo assoluto è costretto a riconoscere l'immutabile fissità delle sue leggi, anche se le facesse dipendenti dai puri principî logici di identità e di contraddizione, come *la necessità teorica determinante della*

(1) G. Tarozzi, *L'organamento logico della Scienza e il problema del determinismo.* Firenze, L. Nicolai ed., 1899.

Digitized by Google

scienza. Ma in secondo luogo, quali che siano le ragioni speciali contro l'*a priori*, non è forse parimenti chiaro che il processo di quell'interpretazione empirica dei fatti logici matematici e fisici che s'indica comunemente col nome di determinismo, è costretto a riconoscere che i fatti scientifici riferiti avvengono in virtù di qualche cosa che si può considerare come *la necessità empirica ma sempre determinante della scienza medesima*? Dunque un' affermazione fondamentale è comune alle due scuole diverse, l'affermazione cioè della necessità determinante della scienza logica, matematica e fisica.

V'è dunque un determinismo scientifico razionale, e un determinismo scientifico empirico, da cui nè la Logica, nè la Matematica, nè la Fisica possono liberarsi per nessuna via.

Riassumendo, ci basti per ora di rilevare, come risultato delle considerazioni precedenti, che tutte le interpretazioni così dell'esperienza come della teoria nei campi della Logica, della Matematica e della Fisica — pel semplice fatto di quella necessità determinante che è l'esigenza innegabile d'ogni ordinamento del sapere — sono riducibili alla forma più generale del determinismo scientifico.

31. Lasciando ora da parte il determinismo scientifico su cui ritorneremo nei prossimi paragrafi, volgiamo lo sguardo ad un altro ordine di idee che assume sempre crescente importanza nella interpretazione della esperienza e della teoria in generale, vale a dire a quella grande e novissima corrente della interpretazione filosofica della Logica, della Matematica e della Fisica che, per reazione alla vecchia corrente del determinismo dogmatico empirico e razionale, viene distinta comunemente col nome di *indeterminismo.*

Digitized by Google

Questo modo di intendere i fatti proposti, facendoci esordire dalle basi fondamentali della Logica, della Matematica e della Fisica ordinaria, ci proietta nei campi sublimi della metalogica, della metamatematica (comprendendo in questo termine la metaritmica e la metageometria) e della metafisica, nel senso stretto della parola. Il lettore non si lagni che si introduca nel corso di queste ricerche, che furono finora mantenute tanto vicine alla realtà ordinaria, una serie di considerazioni astruse. Se egli avrà la pazienza di seguire attentamente questi sviluppi teorici alla cui fortuna lavorarono negli ultimi cinquant'anni molti fra i logici, i matematici e i fisici più insigni d'ogni parte del mondo, sarà poi in grado di coordinare — per alcune nuove ragioni — due grandi serie di fatti scientifici che altrimenti rimarrebbero sconclusionate ed aberranti: il determinismo e l'indeterminismo scientifico.

32. In verità il semplice fatto della posizione teorica del determinismo — importa, per antitesi (la quale non tarda mai a sorgere in tutti i campi) il fatto dell'opposizione teorica dell'indeterminismo. Ora se il determinismo può rappresentare per qualcuno la più tirannica e in pari tempo più logica prigionìa dello spirito, l'indeterminismo può ben rappresentarne dal canto suo la più sfrenata, metalogica, metamatematica e metafisica liberazione. Al fatalismo sottentra il miticismo; all'ἀνάγκη l'ἄπειρον; ad una convenzione praticamente utile, un'altra convenzione teoricamente feconda. Consideriamola dunque brevemente. Di fronte al determinismo scientifico logico e matematico, che alto agitando il rigore e l'universalità delle sue leggi, ed offrendo il miraggio della sua infallibilità ed applicabilità universale, preludia assolutamente ad un

Digitized by Google

tempo in cui tutto il materiale scientifico sarà cristallizzato in forme rigide di ripetizione integrale, l'indeterminismo logico e matematico, liberandosi dal concetto meccanico di cui le scienze logiche e matematiche per tanto tempo s'erano fatte inflessibili conservatrici, respingendo la necessità e fissità di tutti quanti gli assiomi — da quelli geometrici di Euclide, fino ai logici di identità e di contraddizione — proclama la caduta d'ogni forma di necessità determinante, e slanciandosi, con incredibile ardire, oltre l'agnosticismo formola queste tre conclusioni principali:

1° tutte le leggi del mondo logico e fisico in generale hanno un carattere puramente ideale, e convenzionale;

2° tutte le leggi, matematiche in particolare, non hanno alcun vincolo di rispondenza necessaria colle quantità reali dell'esperienza;

3° d'ogni *realtà di fatto*, così della natura come dello spirito, così della coscienza come della scienza, si può trovare un numero di soluzioni soddisfacenti variabile all'infinito.

Ora questo furore di libertà scientifica indeterministica, contro il meccanicismo, contro il determinismo dogmatico ed empirico, contro la logica tradizionale, che vantaggio positivo ha recato alla scienza?

33. In primo luogo, circa la Metalogica e la Metafisica giova osservare che esse vengono trascinate a rimorchio dagli audaci novatori metamatematici, e questa è la ragione per cui fermeremo la nostra attenzione, in particolare modo, sopra il campo dell'indeterminismo matematico.

34. Circa la metaritmica poi, non sapremmo indicare meglio l'indirizzo dell'indeterminismo che rife-

Digitized by Google

rendoci alla teoria di Cantor. La sua tesi — specialmente per opera dei suoi più ardenti seguaci — non solo si ribella al concetto tradizionale della scienza dei numeri, ma non è pur compatibile con la terminologia classica dell'analisi e con volo temerariamente sublime *oltrepassa i limiti dell'infinito matematico stesso.* Adoperiamo questa frase così irrappresentabile e contradditoria appunto perchè il *transfinito* del grande matematico è un'ipotesi perfettamente irrappresentabile e contradditoria. In verità egli comincia per confondere insieme le due nozioni fondamentali del numero e della grandezza attribuendo alla prima le proprietà caratteristiche della seconda, quindi servendosi del poderoso strumento della continuità matematica — intesa in un senso suo proprio — ed ammettendo che il numero si esaurisca in tre processi distinti: intieri, frazionarî, incommensurabili, immagina, per esempio, che l'insieme dei numeri incommensurabili sia di potenza superiore all'insieme dei numeri intieri, così introduce la sua nozione eterogenea di *insieme* o di gruppo, e con essa la nozione affatto inafferrabile di un *infinito graduato* pel quale la serie dei numeri intieri non dà che un *primo infinito, limitato nella sua collezione,* che a sua volta diventa il punto di partenza di una scalinata strana ed inintelligibile di infiniti distinti e sovrapposti consecutivamente. È bene aggiungere che questa serie paradossale metaritmica, che urta le idee generalmente accettate dall'umanità, incontra pure resistenze considerevolissime da parte di molti matematici i quali le rifiutano ogni ombra scientifica di necessità e perfino di utilità. Tuttavia, restando paghi di seguire curiosamente un' opera di sì audace indeterminismo matematico, possiamo appena conchiudere che la terribile diffidenza dei sofisti greci anche rispetto alle più rigo-

Digitized by Google

rose nozioni delle scienze matematiche, forse non fu tutt'opera vana. Le difficoltà, che ora arrestano molti spiriti più sottili e più spregiudicati, non hanno gran che cangiato di natura, anzi pare che si vengano riaffacciando e precisando inevitabilmente. Ma il risultato più generale di questo indeterminismo metaritmico non fa che comprovare sempre meglio che, in ogni ramo delle discipline scientifiche, vano tentativo è stabilire dei limiti ed affermarli insuperabili, poichè pensare il limite è oltrepassarlo.

35. Circa l'indeterminismo metageometrico si possono ritenere come fondamentali a questa teoria i seguenti punti:

1° lo spazio reale non è lo spazio euclideo, sia poco o molto o del tutto differente da esso, a seconda della frase felice e più generale proposta dal Calinon, cioè a seconda delle oscillazioni del nostro parametro spaziale. Infatti, lo spazio euclideo è omogeneo anzi isogeno, cioè indefinitamente divisibile in parti simili, sempre identico a sè stesso, invariabile nel tempo, ideale, astratto, immaginario, ipotetico, probabile, possibile, fittizio, contradditorio, penetrabile, riducibile, contrattibile, ripetibile, determinato, discontinuo, tipico, relativo, ecc.; lo spazio reale è eterogeneo, sempre differente, variabile, concreto, impenetrabile, irriducibile, indeterminato, indivisibile, unico.

Dopo quanto si è riferito — esponendo le controversie (cap. I) e tracciando la storia degli assiomi geometrici (cap. II di questa parte II) — ne basti l'osservare in secondo luogo che i metageometri ammettono come dimostrati questi altri punti:

2° la creazione dello spazio " *geometrico* " è un semplice atto dello spirito;

Digitized by Google

3° non v'ha *una* geometria vera, ma v'ha una infinità di geometrie più o meno semplici, comode e soddisfacenti.

È *noto che* nello spazio d'Euclide la somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti; nello spazio sferico di Riemann la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti; nello spazio pseudo-sferico di Lobatchewsky la somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti; nello spazio di Euclide per un punto non si può tirare che una sola parallela ad una retta data; nello spazio di Riemann non possono essere rette parallele; nello spazio di Lobatchewsky si possono tirare infinite parallele ad una stessa retta.

Così l'iperspazio geometrico si predica nè più nè meno legittimo dello spazio geometrico e subgeometrico, nè più nè meno impossibile o possibile, per quanto ora — in certo modo — si possa dire *meno esistente* di essi.

Ogni spirito è sbalzato " irresistibilmente " al di là della 3ª dimensione e una volta accettata questa possibilità logica, lo spirito non si rifiuta più di concedere la possibilità di un'*ennesima* dimensione ulteriore, e, in breve, finisce per ammettere che la diversità fra le varie convenzioni spaziali piane, sferiche, pseudo-sferiche, elittiche, iperboliche, paraboliche... non è che una *questione di parametro*, e che in ultima analisi, forse, non trova tanto assurdo il supporre che l'evoluzione di tutto l'universo non sia altro che la funzione di un parametro cosmico perennemente oscillante dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande.

36. Queste idee trascinano certo grandi modificazioni nelle tesi filosofiche, concernenti lo spazio, e la

Digitized by Google

teoria generale della conoscenza. Noi abbiamo già avuto occasione di accennare che la certezza apodittica ed universale della matematica classica, affermazione capitale per Kant, è ora, *se non scossa, certo interpretata da un punto di vista completamente diverso.* Anche ammettendo col Poincaré che la verificazione *a posteriori* dei postulati fondamentali della geometria (supponendola praticamente possibile) non sarebbe meno illusoria, e che il valore soggettivo dei postulati non cambierebbe mai, od anche ammettendo che si possano seguire le varie ipotesi scientifiche liberamente, e, con facile trasposizione di termini, compiere i nostri studî con qualunque ipotesi, resta sempre profondamente modificata la nozione ordinaria della verità, nei varî ordini dei fenomeni. Noi sappiamo, è vero, che la geometria euclidea non è contraddetta da alcun fatto osservabile, ma sappiamo pure che essa non è trascinata necessariamente dai fatti. Se adunque la teoria euclidea non è neppure un'*ipotesi necessaria* come direbbe il Calinon, tutte le nostre leggi astronomiche, logiche, matematiche e fisiche, basate sui calcoli ottenuti secondo l'ipotesi d'uno spazio euclideo (ripetizione integrale di Weber, ecc.) ci dànno appena *una rappresentazione* relativa particolare e determinata del processo naturale dei fatti, la cui scelta, fra gli infiniti altri modelli possibili, può essere unicamente giustificata da pure ragioni di semplicità, di comodità, in una parola, di maggior o minor rappresentabilità.

37. Concludiamo. Quando si pensa ai *risultati filosofici più utili e collettivamente fecondi* che si dovrebbero trarre da questo generale movimento indeterministico delle matematiche, mémori della piena e mutua convertibilità, sostituibilità ed equivalenza delle

Digitized by Google

varie teorie scientifiche, una sola conclusione, a parer nostro, s'impone: *l'opportunismo teorico sopra tutta la linea.* Da questo punto di veduta che valore ha dunque il movimento attuale dell'indeterminismo matematico? È chiaro che noi dobbiamo vedere in esso nulla più che una reazione legittima agli eccessi del fatalismo deterministico precedente. Ma sarebbe ingiusto l'obliare che esso non si limita a porre in sospetto l'autorità delle generalizzazioni dogmatiche della scienza, che pretendono di spiegare esse sole tutta la realtà, appagandosi di mutuarvi la vera natura dell'organamento logico della scienza; quindi abbandonandosi all'impeto della più sfrenata illusione, precipita, da troppi lati, nei grandi mari dell'agnosticismo, del misticismo, dell'illusionismo e dello scetticismo.

La ragione è chiara. Nello spirito umano, tanto il determinismo quanto l'indeterminismo proiettano una ombra larga e ingannatrice ogni qual volta si dimentichi di seguire le due ipotesi, solo fin dove ci permettono di interpretare " praticamente „ i fatti, di aggrupparli, di collegarli fra loro, e di prevederne dei nuovi; in una parola, solo fino a che esse si mostrano " praticamente „ feconde. Ora il giusto mezzo si mantiene solo a patto di non perdere di vista che le due interpretazioni opposte dei fatti non sono che le due posizioni opposte di uno stesso principio radicale, capace di estrinsecarle e pure di reintegrarle tutte e due. Così, pur giungendo ad una conclusione che porta la contraddizione al cuore della scienza, noi possiamo soltanto concludere che *la contraddizione è il segno della segreta opposizione delle cose a lasciarsi capire " isolatamente „.*

Digitized by Google

CAPITOLO SECONDO

Del fondamento artistico della scienza.

1. Nei capitoli antecedenti abbiamo ottenuto alcuni risultati notevoli intorno alla teoria dei modelli applicata alle singole teorie della Logica, della Matematica e della Fisica. Le cose principali si riducono in sostanza alla constatazione dell'analogia tra gli argomenti logici della Logica, della Matematica e della Fisica, tutte le teorie delle quali possono considerarsi — molto vantaggiosamente — come semplici modelli rappresentativi di ciò che succede nel mondo dell'esperienza astratta ed astratta-concreta.

Se in base a questa considerazione si vuole ammettere in tutta la sua generalità il risultato della teoria, noi dobbiamo concludere pertanto che anche le idee, gli assiomi, e le leggi della Logica, della Matematica e della Fisica non sono altro, alla loro volta, che modelli dei fatti logici, matematici e fisici corrispondenti.

Otteniamo così un'interpretazione impreveduta delle tappe principali del processo scientifico che furono da noi segnate ad una ad una, per richiamare l'attenzione

Digitized by Google

dei lettori dalla superficie esterna del fenomeno della scienza in generale al giuoco intimo dei suoi elementi e delle sue leggi; interpretazione del resto tanto impreveduta quanto vantaggiosa, non solo per quell'interesse che è congiunto a tutto ciò che si accosta in qualche modo ai principî dell'umano sapere (quantunque, a vero dire, a questo solo ideale si rivolgano le nostre modeste ricerche), ma anche per le conseguenze pratiche che se ne possono evidentemente derivare.

2. Vogliamo passare ora all'esame d'un problema completamente nuovo — almeno per la maniera in cui viene posto — e cioè ci vogliamo domandare se fondandoci sulla teoria dei modelli, dimostrata applicabile rigorosamente ai varî ordini delle scienze riferiti, possiamo giungere a qualche conclusione definitiva intorno alla natura della scienza.

Se non che, non è nostra intenzione di correre tutto questo campo nella sua immensa larghezza; ci limiteremo al caso, per noi più interessante, nel quale si tratterà di decidere se si debba respingere o attribuire il carattere rappresentativo, estetico simbolico alle scienze proposte.

L'arte e la scienza hanno qualche vincolo comune con la realtà? Attribuendo un qualsivoglia carattere estetico alla scienza non si falsifica il criterio della verità? Non si travisa il pensiero conoscitivo? Non si rovesciano le basi del sapere scientifico? O la formalità estetica — intesa però in modo adeguato — ben lungi dall'essere un'infiltrazione equivoca e rovinosa nella compagine della scienza non sarà invece da considerarsi come un'esigenza indeclinabile del processo scientifico medesimo?

Digitized by Google

Tale è il problema che cercheremo di risolvere ora, rivendicando i diritti della scienza a partecipare di quell'unico mondo mentale di cui il fenomeno scientifico e il fenomeno estetico sono due inseparabili poli.

3. Son varie e di diversa efficacia le ragioni che si adducono intorno a questo problema; valgano per tutte quelle che furono radunate, con singolare vigore, dal Marchesini, il quale, trascinata la questione del fondamento artistico della scienza sul terreno del simbolismo — per la ragione che l'arte riposa essenzialmente nel simbolo estetico o rappresentativo, come suo essenziale fondamento — respinge quadratamente ogni interpretazione simbolica della scienza. — Vediamo per sommi capi queste ragioni.

" La scienza non è simbolica, perchè non è simbolica in sè stessa la conoscenza, nè l'idea che ne è l'elemento essenziale. Ciò risulta dalle cose dette più sopra; ma potrà ancor meglio apparire da due nuove osservazioni.

" *Osservazione prima.* — La scienza non è, per sua natura, simbolica, perchè non è nel suo più alto significato nè puramente soggettiva nè puramente oggettiva. Se si ritiene simbolica, ciò è dovuto all'errore per cui si mantengono idealmente contrapposti l'oggetto e il soggetto.

" *Osservazione seconda.* — La vera conoscenza è nell'idea concreta, ed è nell'idea astratta solo in quanto questa riassume più idee concrete, di cui concepiamo l'intima organizzazione logica. Il simbolo è un dato formale che ci astrae per sè dall'obbiettiva conside-

Digitized by Google

razione del fatto, alla quale è pur debito di scienza il richiamarci „ (1).

In fondo si osserva:

1° la scienza è nella serie dei fatti naturali e umani un fatto dinamicamente continuo. Considerarla come soggettiva in confronto dell'oggettiva realtà sarebbe come considerare soggettivo l'effetto e oggettiva la causa. Dicendola simbolica noi la diciamo implicitamente soggettiva, perchè il simbolo è infatti per sua natura soggettivo, ossia convenzionale, mutevole, indifferente, qualità opposte a quelle proprie del fatto scientifico o, meglio, dell'idea scientifica del fatto..... La scienza è l'unità massima dell'essere in quanto è essere..., e non essendo quindi nè puro pensiero, nè puro fatto fisico, non è nè soggettiva nè oggettiva, ma la sintesi massima in cui scompare ogni dualismo (p. 230);

2° la conoscenza puramente simbolica equivale a pura forma; ma la parte formale, esteriore, visibile delle cose e dei fatti è ben poca cosa in confronto dell'intima loro natura e del loro intrinseco organamento (p. 231). Ciò che distingue l'arte dalla scienza è il diverso valore che per esse ha il simbolo..., nell'arte il simbolo giova come mezzo rappresentativo, ma in essa ha pure un fine in sè stesso... (p. 238). Nella scienza il simbolo non ha valore di fine, ma soltanto di mezzo, di strumento... Il simbolo della scienza richiama al reale... esso non deve trasfigurarci la realtà, come fa invece l'arte vivificandola con il sentimento...

(1) MARCHESINI, *Il simbolismo nella conoscenza e nella morale.* Torino, Ed. Bocca, 1901, pagg. 228, 229, 231 *et passim.*

Digitized by Google

insomma deve rappresentarci i *tipi* e le *leggi* spogli quanto è possibile d'ogni elemento puramente soggettivo... (p. 239). La differenza tra la scienza e l'arte e i simboli rispettivi apparirà poi massima se riguardiamo la funzione di questi, più volte accennata, che è rappresentativa nell'arte ed esplicativa nella scienza (p. 240).

4. A queste affermazioni formulate con maggiore o minore recisione si contrappongono varie osservazioni, meritevoli di essere esposte, dall'esame delle quali mi sembra che possa venir fuori un esatto criterio per giudicare sui rapporti tra l'arte e la scienza.

Prima di procedere all'esame del significato del simbolismo scientifico potrei far notare che se è vero, da un lato, che la funzione dei simboli è rappresentativa nell'arte ed esplicativa nella scienza (p. 240), non si potrebbe più affatto concedere, dall'altro, che il simbolo della scienza dovesse " rappresentarci „ i *tipi* e le *leggi* anche spogli quanto è possibile d'ogni elemento puramente soggettivo (p. 239).

L'uso di questo verbo " rappresentare „ deve essere sfuggito, non v'ha dubbio, nella foga della discussione, la quale del resto procede serrata e violenta a tal segno che lo stesso Alemanni, pur difendendo la dottrina del simbolismo con singolare coraggio ed evidenza (quantunque per ragioni in parte estranee alla nostra discussione), è costretto a dichiarare dopo le esplicite obbiezioni del Marchesini: " Questo si chiama parlar chiaro „ (1).

Altro dovere, però, e ben più importante d'ogni

(1) V. Alemanni, *L'elemento psichico*. Torino, Unione Tipogr.-Editr., 1903, pag. 50.

Digitized by Google

scopo polemico, m'incombe. Sono i fatti, unicamente i fatti che potranno eliminare ogni controversia. Ora l'esame delle fasi necessarie al compimento dei due processi, artistico e scientifico, mi sembra appunto il mezzo più adatto al nostro intento. Si rammentino le varie operazioni che compie lo spirito umano nella formazione delle teorie scientifiche in generale: la costruzione del modello per rappresentare ipoteticamente un intiero ordine di fatti, il funzionamento del modello escogitato, la deduzione delle conseguenze artificiali, il paragone dei risultati artificiali coi risultati naturali proposti, da ultimo la formulazione riassuntiva della legge a cui, specialmente nel caso delle scienze matematiche, segue ciò che si suol chiamare equazione, la quale non è poi altro che l'espressione analitica della legge.

Il lettore vorrà ammettere, di buon grado, che questo quadro non fu tracciato per avvalorare la tesi del carattere artistico della scienza. Frattanto basta riflettere un istante — senza alcuna prevenzione — sopra la vera natura della teoria dei modelli scientifici, per riconoscere che le più forti testimonianze vengono in appoggio di quella tesi.

Infatti, che cosa sono *i modelli* se non imagini scientifiche della realtà? E che cosa sono le leggi e le loro analitiche espressioni, vale a dire le equazioni, se non rappresentazioni tipiche d'un ordine di fatti?

Non abbiamo riconosciuto con Hertz — il grande matematico che fu grandissimo fisico ed ebbe anima d'artista, come fu dichiarato da chi (1) ebbe la fortuna di godere la sua impareggiabile famigliarità — che:

(1) A. Garbasso, « Nuovo Cimento », serie IV, vol. I, gennaio 1895.

Digitized by Google

conoscere le leggi della natura è essere in grado di dedurre dallo stato attuale delle cose lo stato loro per un istante qualunque, e che la via che segue lo spirito umano per giungere a questa conoscenza è la seguente: noi ci formiamo degli oggetti esteriori delle imagini, e cerchiamo di formarcele in modo tale che le conseguenze logiche delle imagini siano alla loro volta imagini delle conseguenze naturali degli oggetti?

La cosa fu ben constatata senza che si cercasse di decidere se la condizione imposta come necessaria alla ricerca ed alla costruzione delle equazioni poteva gettare una qualche luce sul modo più o meno artistico di procedere dello spirito umano.

Ma lasciamoci dunque illuminare, senza vane paure.

Quando Hertz, svolgendo rigorosamente la questione di cui parlo, ne conchiudeva che le teorie della Fisica matematica sono in generale modelli dinamici delle cose; anzi, in un ordine di idee più largo, che ogni rappresentazione che noi ci formiamo dell'universo sensibile è un modello dinamico dell'universo medesimo, finiva egli forse per smarrirsi nelle nuvole d'un idealismo soggettivistico o cercava di pronunciarsi per la natura soggettiva della scienza? Cercava egli forse di far rinascere un pericoloso dualismo fra il soggetto e l'oggetto? Oppure di astrarci dall'obbiettiva considerazione dei fatti naturali alla quale è pur debito di scienza il richiamarci?

Ma non vi è un solo competente cultore della scienza che si rifiuti di riconoscere che il grandissimo fisico ebbe in tutta la sua vita lo studio costante di mantenere la ricerca scientifica, per quanto è possibile, vicina alle cose della realtà.

Proclamare pertanto la *convenienza* positivistica di abbandonare la teoria dei modelli, vale a dire la teoria

Digitized by Google

dei simboli rappresentativi, come elemento essenziale della scienza, perchè altrimenti " si confonderebbero in sè e nei loro ufficî la scienza e l'arte „, non equivale però ancora fortunatamente a segnare la condanna a morte della teoria dei modelli o dei simboli rappresentativi, che fa lo stesso.

Su questo occorre più che la semplice enunciazione d'un *pio desiderio*.

5. Non voglio neppure entrare nei meriti della questione proposta, con una punta d'ironia, dall'Alemanni: " Si comprende facilmente la ragione — egli dice — per cui il concetto del pensiero *simbolo* è respinto dal Marchesini. Egli rende un grande servizio al positivismo, liberandolo da quell'occulto dualismo che lo inquinava..... Infatti, dire che il pensiero è simbolo delle cose è colpire in pieno petto quel principio di continuità dinamica che figura come una delle più gloriose conquiste del positivismo stesso „ (1).

Ma convenga o non convenga alla coerenza logica del positivismo respingere la tesi del fondamento simbolico della scienza, la mia preoccupazione attuale è diversa. Fortunatamente, al disopra d'ogni simpatia scolastica, sono i *fatti* che vengono in appoggio di questa tesi, e, nonostante le obbiezioni dottrinarie, legittimano pel futuro le induzioni in favore della medesima. I giudici più competenti e non sospetti riconoscono oramai liberamente che le equazioni scientifiche (le quali, in fondo, non sono poi altro che modelli o simboli rappresentativi dei fatti) esercitano nella teoria della scienza un duplice ufficio, giacchè da una parte esse vengono considerate come fine supremo, a cui è pos-

(1) ALEMANNI, op. cit., pag. 57, nota.

Digitized by Google

sibile giungere per infinite vie, dall'altra vengono assunte esse medesime come punto di partenza per ulteriori indagini sulla costituzione dei fatti.

Ecco pertanto i modelli, cioè i simboli, considerati da un lato come fine, dall'altro come mezzo e strumento di ricerca scientifica.

Le due osservazioni del Marchesini crollano dunque in massima parte senza rimedio.

E questo è un terreno, con molta probabilità, guadagnato stabilmente per la scienza.

6. E cade in acconcio qui di rilevare che neppure l'argomento della trasfigurazione della realtà, che sarebbe naturale nell'arte per la vivificazione del sentimento, ma inammissibile invece nella scienza che deve *rappresentarci* i tipi e le leggi spogli quanto è possibile d'ogni elemento puramente soggettivo (pag. 239), può fornirci un *motivo nuovo* contro la nostra tesi. Infatti si può dire, con molto fondamento di ragione, che anche la visione mediata dello scienziato è una deformazione, in certa qual guisa, della realtà; come ne è una deformazione la visione immediata dell'artista. Esaminiamo la questione con un po' di larghezza.

7. È noto che il passaggio dal fatto *singolo* della percezione nella sua massima immediatezza e concretezza possibile al fatto *simbolo* dell'astrazione nella sua massima mediatezza possibile si compie mercè alcune operazioni successive che hanno per effetto di eliminare, scegliere e semplificare la molteplicità dei dati percettivi, quindi di ridurre il fatto concreto ai suoi minimi dati percettivi, cioè alla sua più sintetica unità. Tutte queste operazioni possono essere raggruppate adeguatamente sotto il titolo di *simbolizzazione del fatto.*

Digitized by Google

Ma siccome poi nessun fatto scientifico è tale per sè stesso, richiedendosi alla sua qualità di dato scientifico che si colleghi con gli altri dati (giacchè la conoscenza ha appunto un semplice valore particolare, mentre la scienza ha un valore collettivo), così occorre un'ulteriore sistemazione del fatto stesso, la quale avviene mercè una subordinazione, o una coordinazione, o organizzazione, o collegamento, o composizione del fatto nella rete determinatrice della scienza. Questo secondo periodo potrebbe ricevere il nome di *determinazione dell'ordine.*

Fatto ed ordine, ecco una forma nuova e pure accettabile di quella suprema dicotomia della scienza, che fu già riscontrata tante volte — lungo queste ricerche — con parole diverse ma equivalenti.

8. La posizione del fatto scientifico è, in certo modo, la posizione del simbolismo; la posizione dell'ordine è, in certo modo, la posizione del determinismo.

In verità, tuttociò che sappiamo, sotto forma scientifica, della realtà è solo una rappresentazione, cioè un *modello*, come disse Hertz, o, come disse Du Bois-Reymond, un simulacro (*surrogat*) di spiegazione.

Ma giova sempre ricordare che questa finzione rappresentativa è l'unica condizione di orientamento pratico e di comprensibilità che ci sia data nell' infinito campo delle modificazioni sensibili.

L' unica certezza che ci sia concessa tanto della realtà ideale quanto della materiale s'erige ancora — in ultima analisi — sopra questo simulacro di spiegazione. E la scienza che cerca senza posa di scoprire le leggi dei fatti, secondo la processuosità della teoria dei modelli, si risolve in gran parte in un vero processo di

Digitized by Google

imitazione che diventa la condizione stessa della sua esistenza.

9. Ma l'oggetto della scienza, come quello dell'arte, non è solo l'imitazione. Ciò che ammiriamo in un'opera d'arte, ciò che in essa ci piace, non è la sola rassomiglianza esterna delle cose, ma è in questa rassomiglianza pure indispensabile, ciò che l'artista ha saputo porre di nuovo, di inatteso, di sorprendente, una gioia del pensiero in un godimento del senso, la vita interiore dell'anima nella vita esteriore della realtà.

Ciò che ammiriamo in una legge scientifica non è la sola rappresentazione letterale ed analitica d'un dato ordine di fatti presenti, ma è in questa rassomiglianza adeguata ciò che lo scienziato ha posto di nuovo, di sorprendente, d'augusto, cioè la certezza razionale di poter dedurre dallo stato presente delle cose lo stato loro per un istante qualunque. Nè altro facciamo — avverte il Marchesini medesimo in uno dei suoi più cari e non infrequenti lampi di genialità — in ultima analisi, stabilendo una legge, fuorchè lanciarla per così dire, nel campo dell'infinito, nonostante i limiti della nostra intelligenza (1).

Ciò che ci esalta nell'opera d'arte e costituisce la sua bellezza, non è la parte più immediatamente presente e *fotografica* della realtà; ciò che ci interessa di inquadrare nelle leggi scientifiche e ne costituisce la sua verità, non è già la parte più immediatamente presente ed *episodica* della realtà in cui si presentano troppi *punti morti* che non possono entrare nella espressione riassuntiva della legge. La verità che vogliamo

(1) G. Marchesini, *Saggio sopra la naturale unità del pensiero*. Firenze, Sansoni ed., 1895, pag. 7.

Digitized by Google

gettare nello stampo ferreo della legge è la parte tipica, più intensa, più sintetica, più costante che deve esprimere il vero carattere vitale, l'anima, direi quasi, delle cose. Questi caratteri tipici, permanenti dànno quasi la *visione noumenica* d'un intiero ordine di fatti, e sembrano, per tal modo, più reali d'ogni altra più concreta realtà.

È vero che nella realtà — come osserva lo Scalinger — ogni fatto singolo, ogni particolare ha un'importanza per sè; anzi, per essere più esatti, in una scena che la natura ci presenta, nulla è secondario; perchè ciascun elemento ha la sua determinazione, sia di forma, sia di sostanza, e il carattere di ciascuno varia a seconda del modo onde le varie scienze lo osservano (1).

Nello stesso ordine di fatti naturali, esistono senza dubbio delle proprietà che interessano un fisico e lasciano del tutto indifferente un chimico, un fisiologo, un psicologo, un sociologo, ecc., altri che attraggono un logico e rimangono del tutto estranei ad un botanico, ad un industriale e così via.

Ma se in un medesimo ordine di fatti varie proprietà attraggono varie specie di osservatori, è pure innegabile che in sè quello stesso ordine di fatti è indifferente a porre in moto una corrente di pensieri, di osservazioni, o di azioni più tosto che un'altra.

E ciò è vero non solo per la scienza, ma anche per l'arte.

Infatti, chi non sa che per lo scultore, in un dato soggetto, ha una maggior eloquenza quel tratto di realtà che eccita il suo sentimento plastico, mentre il musico discopre più intimamente quell'insieme ritmico

(1) SCALINGER, *L'estetica di Ruskin*. Napoli, Libreria Detken e Rocholl, 1900, pag. 65.

Digitized by Google

di elementi che rivela un linguaggio armonioso a lui solo, come il poeta, a sua volta, riconoscerà in esso quel contenuto ideale che più spontaneamente fa rima con i suoi sentimenti, ed anima la visione della sua fantasia? L'arte e la scienza adunque non sono che una *scelta* di quegli elementi e di quei rapporti che esprimono e rappresentano più sinteticamente una forma di bellezza e di verità.

L'artista e lo scienziato, per tale riguardo, non fanno sostanzialmente che uno stesso lavoro, ma in senso inverso.

L'artista deve riuscire ad essere lo storico del sentimento e della fantasia della natura, per virtù del suo entusiasmo e delle sue simboliche imagini di bellezza.

Lo scienziato deve riuscire ad essere lo storico della ragione della natura per virtù del suo entusiasmo e delle sue simboliche imagini di verità.

10. *Scegliere* è il privilegio incosciente dell'istinto estetico, come è il privilegio cosciente dell'istinto scientifico; in ambi i casi è la forza più libera e dominatrice del genio.

L'artista cerca un dato effetto d'insieme in un'opera d'arte; lo scienziato cerca l'unità di un dato ordine di fatti in una legge. Se ciò non accadesse per l'arte non so come — interpretando un'opera d'arte — potrebbe essere comunicata alla nostra emozione quell'unità estetica che l'artista ha gustato nella sua coscienza, se ciò non accadesse per la scienza, non so come noi potremmo — interpretando una legge scientifica — essere in grado di dedurre dallo stato attuale delle cose lo stato loro per un istante qualunque. Se così non fosse, come si potrebbe giustificare quella legge in cui il Taine ha fatto consistere il còmpito dell'artista, e

Digitized by Google

in cui si potrebbe altresì far consistere il còmpito dello scienziato, la ricerca cioè e la conquista del carattere essenziale e predominante delle cose?

Un pittore di fronte ad una scena naturale, sentendo convergere la sua ammirazione nei ritmi più espressivi di bellezza onde il paesaggio ha vita, raggruppa questi ritmi secondo un ordine che risponda a tutte le sue facoltà visive, morali ed intellettuali, e traduca più intensamente — concentrandola con estrema violenza e quasi *materializzandola* — l'armonia della scena e delle figure. Il pittore — osserva ancora lo Scalinger — vive nel mondo delle imagini artistiche; il suo lavoro sta appunto nel ridurre allo stato di imagini tutto ciò che traversa l'anima di lui; per lui la condizione unica di conoscere le idee è di sentirle nell'espressione sensibile, e di *vederle* dentro di lui (1). E lo scienziato non vive forse anch'egli nel mondo delle imagini scientifiche cioè delle leggi dei fatti? Il suo lavoro non sta appunto nel ridurre allo stato di *modelli* tutto ciò che cade nel campo della sua esperienza? E per lui la condizione unica di conoscere i fatti nel loro essere e nel loro divenire, non è forse di sentirli nell'espressione analitica delle leggi, vale a dire nel vederli dedotti e deducibili nel campo dell' infinito?

11. Ma altri rapporti inosservati passano tra la ricerca scientifica e la ricerca artistica, rispetto al loro scopo.

Arte e scienza cercano entrambe la totalità di alcuni elementi rappresentativi. Infatti, dice il Guyau: " Le but de tout écrivain est de produire chez le lecteur la " *totalité* „ de l'émotion qu'il décrit, et cela, en dé-

(1) Scalinger, op. cit., pag. 73.

Digitized by Google

crivant le " plus petit nombre „ possible des symptômes extérieurs ou intérieurs de cette émotion.

" Il faut donc *choisir* parmi ces symptômes, non pas toujours les plus " *saillants* „ mais les plus " contagieux „. L'émotion sympathique du lecteur est toujours en raison inverse de la dépense d'attention qu'on a exigée de lui.

" Les choix des symptômes de l'émotion est ce qui caractérise l'art de l'écrivain; et ces symptômes peuvent s'emprunter indifféremment au domaine physiologique ou psychologique „ (1).

E per la scienza che altro si cerca di fissare in modo definitivo nella legge se non la totalità degli elementi essenziali all'accadere di un fatto o di un dato ordine di fatti? Dunque se la scienza stessa deve cercare i rapporti costanti e tipici sotto il settemplice velo della realtà, la scelta per lo scienziato non è più solo un arbitrio ma è imprescindibile dovere.

12. Si potrebbero nondimeno trovare moltissime e profonde differenze tra il còmpito dell'artista e quello dello scienziato.

Riporterò un episodio curioso che potrebbe contrapporre in modo radicale l'esigenze dell'arte e l'esigenze della scienza.

Un giorno Turner disegnava dal vero il porto di Plymouth e ritraeva sagome di vascelli a qualche miglio di distanza e visti contro luce.

Un ufficiale di marina, a cui l'artista mostrò il lavoro, rilevò con indignazione che i vascelli mancavano della cannoniera. " Se voi salite sul monte Edgecumbe

(1) Guyau, *L'art au point de vue sociologique*. Paris, 1897, IV ediz.

Digitized by Google

— rispose Turner — e guardate i vascelli contro luce al tramonto, constaterete che non è visibile il bastagio „.

E avendo l'ufficiale replicato che Turner non ignorava l'esistenza della cannoniera, questi rispose: " Il mio còmpito è di dipingere ciò che vedo, non quello che so „ (1).

Ora è certo che nel regno delle scienze un teorico potrebbe dire con eguale franchezza: " Il mio còmpito è di formulare ciò che so, non quello che vedo „. Tuttavia questo fatto non può riuscire che a dimostrare sempre meglio che se l'artista non tiene calcolo, nei suoi modelli, che della distanza apparente, mentre, nei suoi modelli, lo scienziato non tiene calcolo che della distanza reale, entrambi però fanno niente altro che un puro lavoro di rappresentazione dei fatti, ma in senso inverso, come s'è già detto altra volta.

13. Ma forse si potrebbe credere che la condanna inesorabile della nostra tesi venisse appunto da questa interpretazione del diverso lavoro rappresentativo compiuto nella scienza e nell'arte che dovrebbe, secondo noi, somministrare un'arma tanto affilata contro la tesi contraria. Infatti si potrebbe dire: se è vero che l'arte si ferma alla rappresentazione dei fenomeni apparenti, mentre la scienza, oltrepassando la sfera d'ogni apparenza fenomenica e quindi rappresentabile esteticamente, cerca di sorprendere soltanto i rapporti tipici e fondamentali che si riproducono costantemente in tutti i casi, e questi solo riprodurre nell'espressione simbolica della legge, ne risulta che ciò che si vorrebbe far pas-

(1) Scalinger, op. cit., pag. 78.

Digitized by Google

sare per rappresentazione estetica dei fatti in verità non è altro che una presentazione antiestetica dei fatti stessi, per la semplicissima ragione che la scienza evade, per ipotesi, dall'unica sfera dell'estetica rappresentabilità.

Dunque il parlare di rappresentazione estetica o simbolica che dir si voglia nel processo della scienza, non è che un gratuito abuso di linguaggio, il quale non può riuscire che a confondere in sè e nei loro uffici la scienza e l'arte. Ciò infatti che distingue l'una dall'altra è la diversa ricerca che per esse si fa della realtà; l'arte cerca e compie la rappresentazione di ciò che è rappresentabile, l'imitazione di ciò che è quasi otticamente visibile, la riproduzione del sensibile insomma, ed essa vive tra le figure che si incontrano nella realtà; la scienza, per contro, cerca e compie la registrazione di ciò che non è rappresentabile, perchè oltrepassa la sfera episodica dei sensi, l'espressione di ciò che è esteticamente inesprimibile, la riproduzione dei rapporti astratti insomma, ed essa vive in un mondo di idee *senza-faccia*, che non s'incontrano punto nell'immediata realtà delle cose. I *modelli* scientifici, in poche parole, non potrebbero mai essere dei *ritratti* delle cose, perchè mentre il ritratto artistico ci richiama all'esatta, rigorosa e quasi meccanica rappresentazione o imitazione della realtà, la legge scientifica ci trascina alla determinazione pura e semplice del *tipo* che, nella visione della realtà sempre cangiante dei fenomeni, non esiste.

14. Ma queste obbiezioni sono più apparenti che reali, ed io voglio fermarmi appunto un istante a dimostrarlo come complemento necessario della nostra tesi, perchè nessun altro esempio potrebbe istruirci in-

Digitized by Google

torno alla natura dell'arte, e per riflesso intorno alla natura della scienza, meglio che il ritratto. Dopo questi ultimi schiarimenti voglio sperare che non si tarderà più a riconoscere che quali che siano le differenze che contribuiscono a distinguere nettamente la produzione dell'opera artistica dalla produzione dell'opera scientifica, differenze caratteristiche — si noti bene — che non si possono e non si debbono assolutamente dimenticare, senza cadere nel ridicolo, sarebbe similmente affatto ridicolo l'ostinarsi ancora a negare una serie di analogie fra i due processi, che sono imposte dai fatti.

15. È noto che vi sono più maniere di *capire* e di fare il ritratto, e ciascun ritrattista di genio ha la sua maniera personale ed unica di rendere la vita degli altri e il suo proprio stile. V'ha il ritratto dei maestri italiani dove si ritrova l'abitudine delle grandi composizioni e la preoccupazione della forma umana. V'ha il ritratto intimo degli olandesi: Mirevelt, Franz Hals, Holbein, Van der Helst.

V'ha il ritratto, il superbo ritratto decorativo, ricco d'infinite varietà personali; il ritratto di Rubens, in cui le energie corporee paiono cantare il loro più alto inno di gioia; il ritratto di Van Dick, pieno di una grazia e d'un'eleganza mirabili; il ritratto di Rembrandt, avvolto in una tragica fiamma di realità e di idealità contrastanti; il ritratto di Velasquez, chiaro, schietto e grandioso, dove l'aria e la luce digradano con verità meravigliosa, e i personaggi sono collocati in mezzo ad un lume vero come il reale.

V'ha il ritratto sensuale e psicologico dei francesi e dei tedeschi contemporanei. V'ha il ritratto spirituale dei simbolisti e così via. Ma tutti i maestri,

Digitized by Google

sia per i loro difetti, sia per le loro buone qualità, s'accordano mirabilmente nel confidarci che *il ritratto non è una semplice imitazione dei dati esteriori della vita.*

Senza dubbio esso la suppone, ma come un fine più alto. Ma quale fine?

Guardate Holbein. Niuno più di lui ha posseduto l'arte di concentrare ciò che v'ha di originale in una faccia, in un corpo; egli scopre i segni più fugaci e in pari tempo più espressivi e li accorda, egli estrae dagli accidenti il carattere fisico in ciò che esso ha di permanente, egli afferra in ciò che ha di più intimo e di meno comunemente percettibile la personalità vivente. Guardate i suoi ritratti più famosi dove l'osservazione psicologica e l'evidenza della rassomiglianza sono spinte fino allo scrupolo; pure, come osserva molto profondamente il Séailles a questo riguardo, ciò che noi ammiriamo non è la rassomiglianza, nel senso banale della parola, è invece il concerto dei tratti espressivi e la *scelta delle attitudini simboliche cioè più sintetiche della vita.* Il ritratto è un'opera d'arte appunto perchè è un'opera simbolica creata per l'azione armonica dei sensi e dello spirito. Ma l'arte non è mai stata un catalogo di fotografie; essa congiunge sempre nell'opera sua ciò che si congiunge spontaneamente nel cuore e nella fantasia dell'artista. Che ci deve preoccupare la presentazione di ciò che ci richiama all'esatta, rigorosa e quasi meccanica calcografia della realtà sempre cangiante negli individui? Ma non amiamo i ritratti di Velasquez, di Holbein e di Rembrandt senza che ci preoccupi minimamente l'impossibilità di confrontarli coi loro modelli?

16. L'arte vera non cerca nè l'astratto assoluto che per essa non esiste mai, nè l'empirico episodico

Digitized by Google

che non esiste che un istante. Per eguagliare la natura e vincerla nel suo più geloso segreto di vita, gli artisti non hanno da cristallizzare semplicemente, a guisa d'istantanee, le varie particolarità contingenti e supervacanee delle cose.

Infatti, come copiare un oggetto vivente che — nel senso stretto della parola — non resta giammai quello che è in un dato momento, ma cangia senza tregua?

Discernere nella varietà delle fisionomie che si succedono, come i sentimenti che passano involontariamente ed a cui corrispondono sempre particolari atteggiamenti del corpo, discernere — dico — la fisionomia invisibile ma pur tipica e vera che si cela sotto tutte le infinite apparenze visibili ma insignificanti, ricavare ed esprimere il carattere intero d'una vita, rivelare le gioie ed i dolori del passato, far presentire quasi geometricamente il suo destino, formulando in certo qual modo la legge fondamentale della sua vita, ecco l'intento supremo del ritrattista che sappia profondamente quale è l'augusta missione dell'arte.

17. Ed è forse radicalmente diverso l'intento dello scienziato quando s'accinge a ricavare l'unità estraendola dalle particolarità contingenti che la dissimulano e con maggiore o minore rapidità e felicità intuitiva si costruisce una serie di *modelli* provvisorî e preparatorî, a guisa di abbozzi, di frammenti o di studî, d'approssimazione per arrivare più sicuramente alla costruzione definitiva *del modello dei modelli*, cioè al sistema supremo delle equazioni che dovranno costituire un'immagine accettabile dell'universo sensibile?

18. Si obbietterà forse ancora che almeno questi modelli scientifici non rassomigliano precisamente ad

Digitized by Google

alcun oggetto reale e sensibile, appunto perchè ne rappresentano soltanto la *trama interiore*, mentre in tutti i casi le figurazioni artistiche raffigurano od evocano sempre degli esseri reali e riconoscibili immediatamente?

19. Ma è poi vero che l'arte abbia sempre da produrre delle rappresentazioni somiglianti ad alcuno? Io non lo crederò mai. Se i personaggi evocati artisticamente, nel calore della fantasia, per esempio, non rassomigliano ad alcuno, che monta? L'essenziale è che *essi vivano in un dato ambiente.* L'ambiente della scienza è l'infinito, o ciò che si pone per tale. Mi sia lecito di ripetere a questo riguardo un pensiero che ho già espresso in altra occasione, ma per una questione analoga (1). Voi potete togliere alla realtà anche la sua fisionomia, purchè voi le imprimiate la vostra. — La natura e la storia hanno per sè lo spazio ed il tempo; noi troveremo sempre un minuto speciale per fermarvi ogni evocazione, sempre un punto adeguato per collocarvi ogni personaggio anche irreale.

L'artista ha da lottare con la materia, ma per la unità del suo sentimento imprime alle pure creazioni della sua fantasia anche un più complicato ed intenso fremito di realtà e di vita. La vera opera d'arte non ha mai nè diritto nè dovere di essere una semplice imitazione dei dati esteriori delle cose. Il suo fine è ben più alto: è la ricerca e la comunicazione delle forme più sintetiche cioè più simboliche della vita, analogamente alla scienza la quale pure aspira alla conoscenza integrale della realtà cercando di costruirsi, a tal uopo,

(1) Cfr. il mio articolo « *Davide Calandra e il monumento al Principe Amedeo* » nella « Nuova Antologia », 1° maggio 1902.

Digitized by Google

una suprema immagine accettabile (*ein zulässiges Bild*) dell'universo.

20. Il lettore che ha avuto la pazienza di seguirmi sin qui voglio sperare che avrà trovato modo di convincersi pienamente, a qualunque scuola appartenga, che la teoria dei modelli basta da sola a conferire un carattere strettamente artistico alla scienza, perchè in breve se noi ammettiamo che ogni teoria scientifica è in generale un modello, dobbiamo ammettere che quello che è vero per le singole teorie scientifiche è vero anche per l'intero edifizio della scienza, che le raccoglie tutte in sè.

Per amore di brevità non m'indugio a fare risaltare su quali altri punti si riconfermi l'accordo fra la teoria dei modelli artistici e la teoria dei modelli scientifici. Piuttosto voglio aggiungere ancora alcune altre prove di natura alquanto diversa, ma ben imponenti e decisive in favore del carattere altamente estetico della scienza, per non sottrarmi, con un solo ordine di ragioni, al mio dovere di fronte a coloro, e sono i più, i quali credono fermamente che sia un formidabile abuso di linguaggio parlare di fondamento artistico della scienza e a dirittura pazzesco ogni tentativo di ravvicinamento tra i due processi; tanto è difficile, per uno spirito sprovvisto di formazioni matematiche, ad es., rendersi conto — anche da lontano — della natura e dei diritti presenti di queste scienze dalle multiple branche, e tanto sono rari i casi degli studiosi che siano ad un tempo stesso e buoni filosofi e buoni matematici, secondo l'altissima idealità di quel grande uomo che fu Leibniz in cui mirabilmente rifulge la portentosa congenialità della matematica e della filosofia.

I sostenitori del carattere artistico della scienza sono

Digitized by Google

molti e molto competenti. Sentiamone alcuni, e primo per tutti il Visconte Roberto Adhémar, il quale in uno splendido saggio " *Art et Science* „ pubblicato sulla *Revue des Deux Mondes* (1), rileva appunto i più poderosi argomenti in favore di questa tesi, e le sue parole hanno non di rado l'accento inspirato del poeta.

In una questione così grave il pensiero di questo forte scrittore merita veramente d'essere riportato. Con lui è ben piacevole cosa l'osservare che il Taine medesimo dopo d'aver diviso la vita umana in due circoli: l'uno inferiore (conservazione, perfezionamento e propagazione della specie: lavoro, industria, famiglia, stato, leggi, armate, ecc.); l'altro superiore o di contemplazione (per cui l'uomo si interessa alle cause permanenti e generatrici da cui dipendono il suo essere e quello dei suoi simili, ai caratteri dominatori ed essenziali che reggono ciascuno insieme e imprimono il loro stampo nei minimi particolari) rammenta che vi sono due vie per raggiungere questo secondo circolo:

1° la scienza, per cui l'uomo scoprendo queste cause e queste leggi fondamentali le esprime in formole esatte e in termini astratti;

2° l'arte, per cui l'uomo manifesta queste cause e queste leggi fondamentali di una guisa sensibile, rivolgendosi non solo alla ragione ma ancora al senso e al cuore di tutti gli uomini dai più eletti anche ai più ordinarî.

Questa divisione avvicina in modo sorprendente i due campi dell'arte e della scienza e ci spinge con maggiore chiarezza a investigare se, ad onta dell'essenziale differenza, l'arte che tende alla realizzazione ed

(1) ADHÉMAR, *Art et Science*, « Revue des Deux Mondes », 15 janvier 1900.

Digitized by Google

alla comunicazione del bello, tanto nei sentimenti che mette in gioco, quanto nei metodi e nei risultati, non abbia proprio niente di comune con la scienza che tende alla realizzazione e alla comunicazione del vero tanto nelle idee che mette in gioco, quanto pur nei suoi metodi e nei suoi risultati. Ora non v'ha dubbio che nei veri temperamenti scientifici — e naturalmente si intende qui di parlare di coloro che con un vigoroso colpo d'ala si elevano ben alto, al disopra della folla dei particolari insignificanti e non di quei temperamenti miopi e semplicisti che non conoscono la scienza altro che nei frontispizî dei libri didattici elementari, — l'impressione scientifica prodotta da un'opera di verità, ammirabile per l'ordine delle idee, la proporzione e la unità nella molteplicità, è tanto violenta e maravigliosa da confondersi affatto con l'emozione estetica prodotta da un'opera di bellezza, e ammirabile per le stesse e precise ragioni. Questo fatto singolare della fusione del sentimento estetico con quello scientifico è dichiarato splendidamente dal Poincaré, nelle pagine in cui commenta l'opera del Comandante Halphen.

" Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre *la même impression que l'artiste;* la jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la science, je n'oserais m'exprimer ainsi; je redouterais l' incrédulité des profanes. Mais ici je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs, auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver „ (1).

(1) H. Poincaré, « Journ. de l'École polytechnique », 1890.

Digitized by Google

Dopo sì esplicite dichiarazioni io non ho più che la difficoltà della scelta degli argomenti, e la paura di dilungarmi troppo nel riferire ciò che può considerarsi come peculiare al mio assunto. Ormai non sarebbe più necessario interrogare altri scienziati al proposito; ma la parola d'un altro grande pensatore verrà ancora opportuna a chiarire come la costruzione dei meravigliosi edifizî immateriali delle matematiche, in cui s'indovina non di rado una potente inspirazione geniale, sia propriamente diretta dal gusto estetico. Ecco che cosa pensa il Tannery intorno a quel periodo di costruzione dell'opera scientifica che corrisponde perfettamente all'inspirazione dell'artista per la creazione dell'opera d'arte.

" Dans cette merveilleuse organisation de l'idée de nombre il semble que l'homme se soit joué des obstacles les plus impossibles à surmonter, qui l'attiraient et qu'il a plus d'une fois réussi à tourner.

" L'obstacle n'était vraiment dépassé que quand l'homme avait retrouvé, souvent *démesurément agrandies*, les lois qui régissaient le domaine qu'il venait de quitter; son *goût esthétique* pour l'ordre pour ce qui est, à la fois, nouveau et le même, était satisfait pour un instant „ (1).

Sorvolo sopra l'impiego dell'intuizione e dell'imaginazione che è di capitale importanza nelle scienze tutte, e massimamente nelle scienze astratte che hanno estremo bisogno di essere costruite con architettonici e maestosi coordinamenti di idee.

Non solo le arti dunque sono belle, ma sono belle anche le scienze in generale e la logica, la matematica e la fisica in particolare e i sommi logici, i matematici e i fisici non sono altro che sublimi inventori,

(1) TANNERY, « Revue générale des Sciences », 1897.

Digitized by Google

creatori e poeti. Il genio scientifico e il genio poetico non sono di natura differente.

Il Visconte Roberto Adhémar, nel suo splendido *Saggio sopra l'arte e la scienza*, sostiene ancora che tutte le opere umane sono disponibili in una scala costruita in modo tale che la bellezza venga di più in più liberata dalle forme sensibili, e i piaceri dei sensi siano decrescenti allorquando diventano crescenti i piaceri dello spirito. Presso alla sommità sarebbe la bellezza matematica così pura e così serena che precisamente non potrebbe essere gustata o rivelata fuorchè per una gradazione di bellezze di cui essa sarebbe il termine quasi supremo.

E verso la fine egli grida, con accento veramente commosso: " Bisogna che l'idea *transluceat* attraverso il segno; *sit symbolum translucens*. Questo non è meno vero dell'arte che del linguaggio matematico ".

" L'opera d'arte deve essere come una lampada d'alabastro, di cui la materia sia bella e pura: l'idea della bellezza brucia al di dentro come una fiamma e ne rischiara la forma " dice Alfredo Tonnellé (1).

" Nell'opera matematica l'alabastro è ridotto quasi a nulla, noi contempliamo la fiamma medesima, la luce nella sua sorgente " (2).

21. Attraverso i molti rigiri delle frasi, un po' vaghe per necessità trattandosi d'una questione che non compatirebbe di essere esposta con assoluto rigore, siamo dunque riportati a concludere che il dissidio fra

(1) A. Tonnellé, *Fragments sur l'Art et la Philosophie*. Paris, 1874.

(2) Adhémar, *Art et Science*, « Revue des Deux Mondes », 15 janvier 1900.

Digitized by Google

un certo qual modo di intendere il procedimeato dell'arte e un certo qual modo di intendere il procedimento della scienza non è inconciliabile, come in principio si era sospettato. Il grande problema della teoria della scienza acquista per conseguenza una base assai più larga e più solida in questo vincolo che noi stabiliamo fra la teoria della scienza e la teoria dell'arte, entrambe rivolte alla rappresentazione comune della realtà, per quanto restino collocate ai poli opposti dello stesso mondo mentale.

22. E se tale è il còmpito prescritto all'arte ed alla scienza, perchè mai di tanto biasimo sarebbe degna quella opinione che fa professione più aperta ed evidente di simbolismo bene inteso, così nel campo dell'arte, come in quello della scienza?

L'affermare che tanto l'arte quanto la scienza hanno — entro certi limiti — un carattere simbolico rappresentativo comune non importa la rovina nè dell'una nè quella dell'altra, nè segna la condanna del positivismo, nè è destinata a portare in trionfo l'idealismo nè il dualismo, nè qualsivoglia altro sistema filosofico siffatto.

23. Tutto sommato — e per ritornare definitivamente alla teoria della scienza che non fu abbandonata un istante fuorchè per guardarla da lontano con un diverso angolo visuale — avendo stabilito che le varie operazioni in cui si risolve il processo scientifico si riducono alle due seguenti:

1° la simbolizzazione del fatto;

2° la determinazione dell'ordine;

possiamo comprendere che la scienza considerata in tutta la sua teoria non è che un vasto determinismo simbolico, o simbolismo deterministico che dir si voglia,

Digitized by Google

il quale può essere considerato alla sua volta come un semplice *modello* della realtà.

Per esso la visione " mediata „ dello scienziato alterando, modificando, deformando vale a dire in tutti i casi sempre formando volontàriamente la presentazione immediata dei fatti, come avviene in ogni fatto d'esperimento, modella e collega i fatti con quell'unica *maniera* che è propria della mente umana.

24. Questa deformazione è ad un tempo arbitraria e necessaria. L'arbitrarietà deriva dall'aggiunta della duplice alterazione simbolica e deterministica ai fatti dell'esperienza immediata; la necessità deriva dall'impossibilità di costruire la scienza umana diversamente.

Noi siamo liberi, è vero, di costruire o di non costruire la nostra scienza.

Se vogliamo restare nell'incoerenza dell'esperienza immediata senza dubbio evitiamo di cadere nella rete determinatrice e simbolica della scienza.

Ma se vogliamo fare un solo passo fuori del campo coerente dell' esperienza immediata verso un organamento scientifico qualunque, il simbolismo e il determinismo dell'esperienza mediata sono inevitabili.

La coerenza logica si compera pertanto a ben caro prezzo — ma l'acquisto è fonte di tutti gl' incomparabili vantaggi della civiltà!

25. L'esperienza immediata raccoglie i fatti singoli e concreti della realtà e li offre all'elaborazione superiore dell'esperienza mediata, la quale spogliandoli gradatamente di tutto ciò che non è tipico e scientificamente rappresentativo, li attrae, li purifica, li simbolizza, e finalmente quando non ha più lasciato loro altro fuor di ciò che li fa vedere *ciò che sono o ciò*

Digitized by Google

che diventano distinti da tutti gli altri, li getta nello stampo definitivo della legge. Quindi la scienza li dissecca e li conserva nelle sue formole così strette e provvidenziali come le bende d'una mummia, e se ne vale come d'essenze concentrate di realtà.

26. Ma i fatti scientifici superiori, vale a dire le leggi in cui si esprimono, per tal modo, nella loro tipica verità e nella loro astrattissima purezza i caratteri fondamentali delle cose, sono bene spesso inattesi, sorprendenti e talora perfino incredibili.

Sovente essi non hanno, per chi voglia applicarli praticamente, nè conseguenze dirette, nè comodità sensibile, nè bellezza evidente; e per conseguenza i loro valori sfuggono ai criterî degli storici troppo superficiali. La filosofia soltanto potrà riconoscere e scegliere ed accogliere ancora una volta questi *simboli* derivati in una sintesi o *modello supremo* rappresentativo di tutti gli ordini dei fatti conosciuti.

Ma non è il caso di insistere, per ora, sopra questo argomento.

27. Piuttosto conviene riassumere i risultati più notevoli ai quali siamo giunti in questo capitolo. Essenzialmente: abbiamo veduto quanto abbia di arbitrario e di falso il proposito di negare ogni carattere simbolico all'organamento logico della scienza. Fra il processo rappresentativo o simbolico dell'arte e quello della scienza sono state riscontrate alcune profonde analogie, le quali ci costringono ad allargare la nostra visione teorica della scienza e perfino della realtà. Inoltre abbiamo veduto che un bene inteso concetto della natura simbolica della scienza non avvia al dualismo, nè ha bisogno di schierarsi pro o contro il po-

Digitized by Google

sitivismo, tanto meno poi rovina la validità della scienza, anzi manifesta l'attività fondamentale unica e coerente dello spirito e, guardato dal punto di vista della generale teoria dei modelli, fornisce un' interpretazione rigorosamente accettabile dei fatti scientifici. E se anche questo non è oggettivamente vero, almeno molti fenomeni logici, matematici e fisici avvengono *come se* le cose fossero ordinate appunto così. Donde è logico concludere in ultima analisi che la teoria della scienza compirà un'opera veramente restauratrice se — pur liberandosi da ogni gratuita confusione non autorizzata dai fatti — non dimenticherà di porre in luce il giusto valore del simbolismo deterministico della scienza che è veramente il fondamento logico (*ratio cognoscendi*) delle nostre cognizioni.

Così la teoria dei modelli resta una delle più salde conquiste della critica, dimostrandosi in generale come il vero contratto di nozze fra la teoria della scienza e la teoria dell'arte, e rivelandosi in particolare come il fiore simbolico della scienza.

Digitized by Google

CAPITOLO TERZO

Dell'identificazione matematica del differente.

---

1. Qualunque sia il risultato delle ricerche precedenti sopra la teoria delle scienze logiche, matematiche e fisiche, non può dirsi che i problemi più importanti di tutte queste teorie siano risoluti definitivamente. Noi non vogliamo dire, per esempio, che si sappia meglio di prima a che tenersene sopra l'impiego pratico delle idee primitive che abbiamo analizzato ed elencato con tanta fatica nella prima parte di questo lavoro; sull'ordine in cui le varie scienze sono andate formandosi attraverso i secoli; sull'introduzione più o meno convincente delle varie proposizioni fondamentali (principî) che si devono considerare come dati della esperienza nel campo della Fisica matematica e della Meccanica razionale; sulle leggi che si tratta di trovare volta a volta, come sintesi definitiva dei varî concetti assunti come primitivi; sulla maniera di costruire le equazioni logiche e sulla maniera di assumerle una volta trovate, come punto di partenza per ulteriori ricerche, ecc.

Digitized by Google

A quest'ora alcuni miei lettori dubiteranno forse già della possibilità di tracciare una sintesi suprema delle varie idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica, altri dei principî supremi della convertibilità e unificabilità delle idee, o delle inaspettate applicazioni generali a proposito delle scienze miste o derivate, o dell'analisi e dell'apprezzamento delle idee primitive della Logica matematica, o della fecondità della teoria dei modelli e via dicendo.

Le soluzioni precedentemente esposte, invece adunque di chiudere definitivamente le discussioni degli studiosi, apriranno loro una più vasta carriera.

Ma poichè noi crediamo che la verità sia il tonico dell'intelligenza, e che niuna amara vergogna possa derivare a chi — se pur dovrà vedere in tutto o in parte l'opera sua demolita dalla critica — non dovrà almeno in alcun modo deplorare che il titolo della sua pubblicazione abbia promesso o fatto sperare assai più di quanto egli non era in condizione di mantenere; perciò faremo sincero plauso a tutte quelle teorie, che pur essendo contrarie alle nostre, dimostreranno rigorosamente quel che noi in modo troppo imperfetto abbiamo tentato di dimostrare.

In attesa pertanto che la verità venga ad allontanarci dalle esagerazioni e dalle ipotesi inaccettabili che possono essere state accolte troppo ingenuamente nel cammino sinora percorso, crediamo ancora che valga la pena di fermarci un istante — prima di chiudere la trattazione del presente saggio — sopra un'altra ipotesi ben singolare, la quale forse è destinata a rimanere ancora per lungo tempo senza interpretazione soddisfacente.

A scanso d'equivoci vogliamo quindi dichiarare apertamente che le considerazioni che aggiungeremo non

Digitized by Google

possono essere scevre di inesattezze perchè l'argomento è, almeno per lo stato attuale dei nostri studî, complicatissimo.

2. V'è nello sviluppo metodico del calcolo matematico un portentoso impiego d'una specie di paralogismo metaforico che potrebbe ricevere il titolo, molto appropriato, di *identificazione matematica del differente.* La gravità del fatto che il principio logico dell'identità ora si affermi come principio incrollabile della conoscenza, ora si neghi o si trascuri completamente, per audace espediente di ricerca e di dimostrazione, da una scienza che si fa vanto del rigore supremo del suo processo, non può essere dissimulata dai pensatori. Pure, in primo luogo, è innegabile che tutti i principî supremi matematici sono ridotti in una forma così astratta ed indeterminata da essere adatti ad esprimere qualsivoglia istoriazione scientifica (logica, matematica, fisica) differente, qualsivoglia trasformazione di entità; in secondo luogo, è facile dimostrare, con gli esempi, che lo spirito matematico discorre con estrema rapidità dall'identificazione dell'identico alla identificazione *ipotetica* del differente.

Cominciamo dall'impiego del principio d'identità.

3. Prendiamo, ad esempio, la nozione dello spazio geometrico infinito e del punto geometrico inesteso. Entrambe queste nozioni si rassomigliano col non ammettere l'idea di quantità o coll'ammetterla tutta quanta astrattissimamente. L'idea di quantità estesa sta fra le ipotetiche idee di spazio infinito e di punto inesteso. Tuttavia lo spirito, attribuendo paralogicamente alla idea astratta le proprietà del continuo, considera l'oggetto della nozione dello spazio infinito come se fosse

Digitized by Google

indefinitamente divisibile, e così da questa proprietà sostanziale attribuita alla nostra forma mentale del tutto soggettiva, arricchita dell'aspetto di entità geometrica continua, deriva l'infinita divisibilità di ciò che non è altro che la nostra inestesa ed impartibile rappresentazione. Per i bisogni della scienza si suppone che la nozione del continuo si risolva nell'unione di un'infinità di particelle infinitamente piccole ed al disotto di ogni grandezza assegnata. Ma dopo tanto e sì prodigioso scompartimento, non venendo mai meno la proprietà del continuo in veruna minima parte in cui venga divisa la grandezza geometrica data, come è possibile concludere altrimenti fuorchè affermando che l'impossibilità di esaurire il continuo altro non significa che l'impossibilità di cangiar l'essenza logica di una cosa? Non è già che il continuo possegga quella sterminata ripetibilità di divisione o di moltiplicazione che diventa la più sublime ed essenziale proprietà delle grandezze matematiche, ma l'infinita divisibilità altro non prova che questa affermazione: " Finchè non facciamo cambiare natura all'idea di estensione, si produrrà sempre lo stesso concetto "; in altri termini: *il continuo è il continuo* e nulla più. Lo stesso si dica, per altro esempio, del problema delle parallele il quale si riduce evidentemente a ciò che le linee parallele non sono le linee convergenti, cioè, ciò che è è, e il diverso non è convertibile nell'identico, *l'identico è l'identico* e nulla più. Lo stesso si ripeta per innumerevoli altri esempi.

4. Ma il mediocre successo che ottennero i matematici col principio di identità, lo spregio anzi in cui esso fu tenuto dai più geniali scopritori lo fecero bandire ben presto come strumento diretto ed esclusivo

Digitized by Google

dell'indagine; non si tardò a comprendere che anche i più eccellenti metodi di dimostrazione sono, nella maggior parte dei casi, i più poveri metodi di scoperta, e finalmente venne il giorno in cui emerse con irrefragabile evidenza che, per la matematica, l'oblìo metodico del principio d'identità e l'uso ben regolato dell'ipotesi contraria è questione di vita e di morte.

Seguire il filo di questo metodo, perchè l'ipotesi fu veramente tradotta in una realtà di fatto e praticata come strumento di scienza, attraverso le menti e le opere dei varî autori, arrestandoci sulle applicazioni più feconde del calcolo, quanto basta per capire il modo di pensare e di *scoprire* le verità anche più modeste della scienza, sarebbe una ricerca stupenda, ma troppo lontana dal proposito attuale.

Ci basti osservare che tutta la matematica è fecondata dall'ipotesi dell'identità del differente. Vedemmo come la nozione del continuo ci porta alla nozione dell'infinitamente divisibile; il continuo dà vita al discreto e da esso è inseparabile. Questa nozione vince di molto la nostra facoltà di comprendere, in tanto è universalmente accettata nella scienza, e con essa si spiega non solo tutta la famiglia degli enti aritmetici e geometrici, ma ancora la nozione dello spazio e del tempo considerati come entità geometriche e ideali. Che cosa sono e l'antichissima teoria dei rapporti di Euclide, applicata da Ippocrate di Chio alle quadrature delle lunule, e il famoso metodo di esaustione di Eudossio impiegato da Archimede per la quadratura della parabola, se non dei tentativi rudimentali diretti a sfruttare l'identificazione matematica del differente?

Il metodo d'esaustione non è altro che una maniera di provare l'eguaglianza di due grandezze differenti, facendo vedere che la loro differenza è più piccola di

Digitized by Google

ogni grandezza assegnabile; ed impiegando — per dimostrazione di quest'eguaglianza — la riduzione all'assurdo. Esso si fonda sopra il noto teorema del Libro X di Euclide: " *Due quantità sono eguali quando la loro differenza sia più piccola d'ogni grandezza assegnabile* ", perchè se fossero ineguali la loro differenza potrebbe essere assegnata, ciò che è contrario all'ipotesi. Chi non vede che al rigore dell'esattezza manca sempre un infinitesimo, insignificante pel calcolo, ma non meno capace d'una grandezza reale qualunque ad impedire l'eguaglianza logica dei due termini differenti?

E tutti questi principî:

1° *Magnitudines quarum differentia probatur minus quavis assignabile, aequales sunt;*

2° La grandezza minor d'ogni data è eguale a zero;

3° Il circolo è un poligono di un numero infinito di lati infinitamente piccoli, e tale principio è applicabile alla quadratura del cerchio, alla cubatura della sfera, dei solidi di rivoluzione (*Doliometria*) (Euclide, Archimede, Galilei, Viète, Kepler);

4° All'indivisibile competono le proprietà della grandezza finita di cui l'indivisibile è ritenuto come parte costitutiva (L. Da Vinci, Kepler, Cavalieri, Wallis, G. De Saint Vincent);

5° Un indivisibile non può accrescere nè diminuire l'infinità degli indivisibili, da cui risulta ogni grandezza finita (Galilei);

6° Il momento di moto finito è la somma dei momenti infinitesimi di moto virtuale (Galilei);

7° È necessario ammettere degli infiniti gli uni incomparabilmente maggiori degli altri (Galilei);

8° Le quantità infinitamente piccole sono trascurabili nei calcoli nostri (Barrow);

Digitized by Google

9° L'infinitesimo è considerabile come grandezza intensiva;

e moltissimi altri, che si potrebbero stralciare comodamente dalle opere di Wallis, Fermat, Robervall, Pascal, Hugyens, Barrow, Newton, Leibniz, Varignon, Bernouilli, Brook, Taylor, Lagrange, Cauchy, non rivelano forse chiaramente la feconda necessità di quell'artificio che rende possibili tutte le più ricche operazioni del calcolo infinitesimale e che non discostandosi mai essenzialmente da questa formola: *due cose differenti sono eguali* (quali poi siano i gradi e le formalità e le riserve di tale differenza), fu da noi designato propriamente col titolo di *identificazione matematica del differente?*

5. Ma se noi vogliamo conoscere, anche solo in via indiretta, in quale perpetua sostituzione metaforica di entità e interminabile risoluzione ipotetica di sfuggevoli elementi generatori ci introduca il principio matematico suddetto, mettiamoci a considerare come, per la virtualità della nozione di limite, la matematica si travagli senza posa, da un lato alla consunzione ed all'integrazione dell'unità, dall'altro alla consunzione ed all'integrazione dell'infinito! Solo con veri salti metaforici noi possiamo trascurare le quantità differenziali quali che siano, trattare il finito come la sua medesima negazione, passare dal rapporto finito all'infinitesimo, e dall'infinitesimo ripassare al rapporto finito.

Vi sono delle serie numeriche che tendono alla consunzione dell'unità, procedendo a passi rapidissimi, e tuttavia queste serie vanno all'infinito, contenendo alla loro volta un infinito numero di termini; siamo ben certi che l'infinitesimo è tanto lontano dallo zero quanto l'essere dal nulla, tuttavia in molti casi siamo costretti

Digitized by Google

ad ammettere che l'*unità è eguale a sè stessa meno una grandezza minore d'ogni data* e che una grandezza a forza di passare per finite diminuzioni e di lasciare finiti residui può essere cacciata fuori dell'ordine finito cioè riducibile a zero. Contrariamente adunque a quanto è stabilito in una parte si afferma la possibilità di esaurire il continuo, in altri termini la possibilità di cangiar l'essenza logica d'una cosa, l'infinito si converte nel finito, il differente diviene l'identico, i concetti contradditorî diventano inseparabili e si richiamano scambievolmente e l'associazione forzata e contraddittoria delle ipotesi non ostacola assolutamente il progresso della scienza.

6. Anzi — se è vero che un metodo scientifico vuole essere apprezzato come uno strumento qualunque cioè in proporzione dell'utile che ci sembra di poterne ricavare -- siccome risulta che l'applicazione dell'identificazione teorica o ipotetica del differente si compie su vastissima scala in tutto l'immenso campo delle conoscenze matematiche, noi dobbiamo riconoscere che questo principio (soltanto come pura ipotesi) offre allo spirito una comodità euristica ed esplicativa della massima importanza. Che la maggior parte dei più notevoli fatti scientifici i quali sembrarono sconvenientissimi e non solo inconcepibili ma perfino impossibili un tempo siano ora diventati teoricamente e praticamente fecondi, appunto in virtù di questo arditissimo traslato, è un fatto su cui non cade più alcuna controversia. Che le finzioni ipotetiche, puramente deduttive e rappresentative dei fatti, siano ora quasi universalmente accettate dai matematici, come strumenti scientifici di immensa utilità, non può essere negato da chi ascolti la voce del tempo.

Digitized by Google

È questa voce medesima che ne fa l'alte difese dimostrando quotidianamente che, così la capacità di supporre che una cosa sia vera " provvisoriamente " quantunque non sia ancora giustificata da prove legittime, come l'abilità e la prontezza di ricavare delle conclusioni preziose dall'ipotesi, diventano sempre più facili e più sicure, e fino a un certo punto sembrano disporci ad ammettere che l'impossibilità di concepire il contrario, cioè *il vecchio principio di contraddizione, può in certi casi diventare il criterio meno utile tanto per la ricerca quanto per la scoperta della verità.* Il principio di contraddizione! Con quanto affanno noi adoperiamo questo criterio, durandoci troppo viva la memoria degli abusi sfrenati, cui fu trascinato per opera dei malvagi, degli stolti e degli intransigenti!

Bisogna esser stato abituato fin dall'infanzia ad usare certe parole, con un significato costante, per dispensarci dall'affanno esagerato di sapere se hanno proprio un significato positivo e permanente; così è sempre necessario disfarsi di ogni preconcetto per adoperare con facilità tanto la frase quanto lo strumento di quel fecondo bisogno scientifico che ci porta alla continua trasgressione illogica del principio logico dell'identità.

7. A tante singolari ragioni potremmo aggiungere la testimonianza stessa degli autori delle più grandi invenzioni e scoperte, per confermare quelle opinioni paradossali che ci siamo studiati di assodare lungo questa ricerca. Ma ci bastino come prove più gradite di tutte queste due irrefragabili testimonianze:

1° l'ininterrotto impiego del principio dell'identificazione del differente, il quale non può essere rinnegato dal processo logico delle matematiche. Questo fatto prova che lo spirito matematico in genere, ag-

Digitized by Google

guerrendosi appunto nel conflitto di tante ipotesi paradossali diverse, va acquistando sempre più la coscienza della propria forza e la libertà dei suoi proprî atti;

2° il rapidissimo incremento delle cognizioni matematiche a cui tien dietro un non meno maraviglioso e rapidissimo organamento logico della scienza.

8. Ma resta una domanda della massima importanza. Quale è la ragione fondamentale di questa bizzarra idealità delle matematiche che noi abbiamo ora considerata così aridamente e senza alcun rapporto colla teoria generale della scienza?

Tale questione rimane ancora senza risposta.

La sola ipotesi più accettabile potrebbe tuttavia parere la seguente.

Se meditando tutto il sublime avanzamento delle scienze matematiche, sia rispetto all'acquisto delle verità, sia riguardo al perfezionamento delle dottrine, noi vogliamo sollevarci ad una conclusione suprema, sembra che sia giocoforza concludere che più si considera sottilmente la formalità del processo matematico, più si resta convinti che il suo progredire scientifico non è altro che un varcare — per ardite supposizioni — i concetti cioè i limiti, prima posti, poscia opposti come impreteribili dallo spirito umano.

Ma a dispetto dei grandi progressi realizzati in questi ultimi anni così dalla teoria del limite come dalla teoria dell'ipotesi le quali sono già si può dire *nell'aria* della generale teoria della scienza, noi dobbiamo riconoscere francamente che, per ora, queste supposizioni sorpassano ancora i limiti della scienza, e come tali devono essere — fino a prova contraria — respinte.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE

Prefazione . . . . . *pag.* VII

PARTE PRIMA

Le Idee primitive.

Criterio direttivo dell'Analisi . . . . . *pag.* 3

Cap. I. Le idee primitive della Logica. . . . „ 7

§ 1. Le idee primitive della Grammatica . „ 7

§ 2. Le idee primitive della Logica naturale e della Logica riflessa . . . . . „ 26

Cap. II. Le idee primitive della Matematica. . „ 40

§ 1. Le idee primitive dell'Aritmetica . . „ 40

§ 2. Le idee primitive della Geometria . . „ 43

Cap. III. Le idee primitive della Fisica in generale e in particolare della Fisica matematica e della Meccanica razionale . . . . . „ 47

Cap. IV. Sintesi delle idee primitive della Logica, della Matematica e della Fisica . . . . „ 67

Cap. V. Applicazioni generali . . . . . „ 86

§ 1. Scienze miste o derivate . . . . . „ 86

§ 2. Analisi ed apprezzamento della Logica matematica . . . . . „ 90

Digitized by Google

PARTE SECONDA

Gli Assiomi.

Cap. I. Classificazione degli assiomi e controversie *pag.* 115

Cap. II. Interpretazione storica degli assiomi geometrici . . . . . „ 149

PARTE TERZA

Le Teorie.

Cap. I. Dell'esperienza e delle teorie logiche matematiche e fisiche in ordine alla teoria generale dei modelli . . . . . *pag.* 161

Cap. II. Del fondamento artistico della scienza „ 196

Cap. III. Dell'identificazione matematica del differente . . . . . „ 226

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google